FUNKTIONAALIANALYYSI
KEVÄT 2009
LASKUHARJOITUS 9

1. Osoita, että funktio $f(x) = 1 + 2|x|$ kuuluu Sobolev–avaruuteen $H^1(-1, 1)$.

2. Kuinka määrittelisit heikkojen osittaisderivaattojen käsitteen esim. kahden muuttujan funktioille $f : I^2 \to \mathbf{C}$, missä $I^2 =]0, 1[\times]0, 1[$? Oleta $f \in L^2(I^2)$.

3. Edelliseen liittyen, kuinka määrittelet Sobolev–avaruuden joukossa I^2, eli Sobolev–avaruuden $H^1(I^2)$? Osoita, että lauseke

$$(f|g) := \int_0^1 \int_0^1 f(x, y)\bar{g}(x, y)dxdy$$

$$+ \int_0^1 \int_0^1 \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} \frac{\partial \bar{g}(x, y)}{\partial x} dxdy + \int_0^1 \int_0^1 \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} \frac{\partial \bar{g}(x, y)}{\partial y} dxdy$$

missä esiintyy heikkoja osittaisderivaattoja, on sisätulo Sobolev–avaruudessasi.

4. Olkoon $\eta(x) := Ce^{-1/(1-|x|^2)}$, kun $|x| < 1$, ja $\eta(x) = 0$ muulloin, missä $C > 0$ on sellainen vakio, että $\int_{-\infty}^{\infty} \eta(x)dx = 1$.
Olkoon $N \in \mathbf{N}$ ja $\eta_N(x) := N\eta(Nx)$. Osoita, että kaikilla jatkuville, rajoitetuille funktioille $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ pätee

$$\lim_{N\to\infty} \eta_N * f(x) := \lim_{N\to\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \eta_N(y)f(x - y)dy = f(x)$$

kaikilla $x \in \mathbf{R}$.

5. Olkoon $S : \ell^2 \to \ell^2$ siirto–operaattori

$$S : (x_1, x_2, x_3, \ldots) \mapsto (0, x_1, x_2, x_3, \ldots),$$

missä $x = (x_1, x_2, x_3, \ldots) \in \ell^2$. Selvästikin S on lineaarinen ja jatkuva. Suppeneeko operaattorijono $(S^n)_{n=1}^{\infty}$ pisteittäin tai operaattorinormin mielessä? Tässä S^n on S:n n:s iteraatti, $S^n := S^{n-1} \circ S$ kaikilla n.