FUNKTIONAALIANALYYSI
KEVÄT 2009
LASKUHARJOITUS 5

1. Olkoot A ja B normiavaruuden E konvekseja osajoukkoja. Osoita, että myös joukko $A + B := \{x + y \mid x \in A \,, y \in B\}$ on konveksi.

2. Jos A on normiavaruuden E osajoukko, sanomme, että $x \in A$ on *normin minimoiva alkio*, mikäli

$$\|x\| = \inf\{\|y\| \mid y \in A\}.$$

Osoita, että $A := \{f \in C(-5, 5) \mid f(0) = 1\}$ on avaruuden $C(-5, 5)$ suljettu ja konveksi osajoukko, jossa on äärettömän monta normin minimoivaa alkioita.

3. Osoita, että

$$A := \Big\{f \in C(0,1) \mid f(0) = 0 \text{ ja } \int_0^1 f(t)dt = 1\Big\}$$

on avaruuden $C(0, 1)$ suljettu ja konveksi osajoukko, jossa ei ole lainkaan normin minimoivaa alkiota. Ohje. Tarkastele ensin vaikkapa sellaisia funktioita $f \in A$, joille $f(t) \geq 0$ kaikilla $t \in [0, 1]$. Havaitse, että näiden f normien infimum on 1, jne.

Seuraavissa tehtävissä on Hölderin epäyhtälöstä epäilemättä hyötyä.

4. a) Osoita, että jos Ω on avoin ja rajoitettu $\mathbf{R}^n$:n osajoukko, niin kaikilla $1 \leq p < q < \infty$ pätee

$$L^q(\Omega) \subset L^p(\Omega). \tag{1}$$

b) Millä parametrien α, $0 < \alpha < \infty$, ja p, $1 < p < \infty$, arvoilla pätee funktiolle $f(x) = |x|^{-\alpha}$ (missä $x \in [-1, 1]$)

$$f \in L^p([-1, 1]) \ ? \tag{2}$$

5. Osoita, että singulaarinen integraalioperaattori

$$Tf(x) = \int_{\mathbf{R}^2} \frac{e^{-|x|-|y|}}{|x - y|} f(y)dy \tag{3}$$

on rajoitettu operaattori $L^\infty(\mathbf{R}^2) \to L^p(\mathbf{R}^2)$ kaikilla $1 \leq p < \infty$. (Kaavassa (3), x ja y ovat $\mathbf{R}^2$:n alkioita, ja $|x|$ on vektorin pituus $\mathbf{R}^2$:ssä, tietty.)