

FUNKTIONAALIANALYYSI
KEVÄT 2009
LASKUHARJOITUS 4

1. Onko

$$A := \{f : [-1, 1] \rightarrow \mathbf{R} \mid f(t) > 0 \text{ kaikilla } t \in [-1, 1] \}$$

avoin avaruuden $C(-1, 1)$ osajoukko (sup-normi)?

2. Osoita, että integraaliyhtälöllä

$$\int_0^1 \frac{1}{2 + |t - s|} f(s) ds + \sin t + f(t) = 0$$

on yksikäsitteinen ratkaisu (välillä $[0, 1]$ jatkuva funktio f).

3. Osoita, että integraaliyhtälöllä

$$f(t) + 2e^{-t^2} + \int_{-5}^5 e^{-100|t| - 100|s|} f(s)^2 ds = 0$$

on ratkaisu avaruudessa $C(-5, 5)$. Opastus. Mieti integraaliydintä.

4. Banachin kiintopistelauseesta on olemassa monia johdannaisia. Todista seuraava:
Olkoon D Banach-avaruuden X suljettu osajoukko, ja $F : D \rightarrow D$. Oletetaan, että F^n on aito kontraktio jollakin $n \in \mathbf{N}$. Silloin F :llä on yksikäsitteinen kiintopiste joukossa D .

5. Olkoot $a \in \mathbf{R}$, $b \in \mathbf{R}$, $a < b$ ja olkoon $K : [a, b] \times [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$ on jatkuva. Tarkastellaan operaattoria

$$Ff(t) := \int_a^t K(t, s) f(s) ds$$

missä $f \in C(a, b)$ ja $t \in [a, b]$. Osoita, että F^n on aito kontraktio $C(a, b)$:ssä jollekin n (vaikka $|K(t, s)|$ ei olisikaan pieni!).

Tarkastele tämän valossa Volterran integraaliyhtälön

$$f(t) = \int_0^t e^{-t^2 + s^2} f(s) ds + 100e^t$$

ratkaisemista, kun f on määritelty välillä $[0, 100] \subset \mathbf{R}$.