FUNKTIONAALIANALYYSI
KEVÄT 2009
LASKUHARJOITUS 2

1. Määritellään avaruudessa $C(0,1)$ "painotettu sup–normi"

$$\|f\|_w := \sup_{t\in[0,1]} w(t)|f(t)| \quad , \qquad f \in C(0,1), \tag{1}$$

missä w on painofunktio $w(t) = \sqrt{t}$. Osoita, että $\|\cdot\|_w$ ei ole ekvivalentti $C(0,1)$:n tavanomaisen sup–normin kanssa.
(Neuvo. Pätee kylläkin $\|f\|_\infty \geq \|f\|_w$ kaikilla $f \in C(0,1)$. Toisaalta, tarkastelemalla esim. funktioita f_n ($n \in \mathbf{N}$), jotka määritellään $f_n(t) := 1 - nt$, jos $0 \leq t \leq 1/n$, ja $f_n(t) := 0$, kun $t \geq 1/n$, voit havaita, että ei ole olemassa vakiota C, jolle

$$\|f\|_w \geq C\|f\|_\infty.$$

Piirrä painofunktion ja funktioiden f_n kuvaajat!

2. Edelliseen tehtävään liittyen, olkoon $w : [0,1] \to \mathbf{R}$ mielivaltainen jatkuva, kasvava funktio, jolle $w(t) > 0$, kun $0 < t \leq 1$. Mitä w:n tulee toteuttaa, että normit $\|\cdot\|_w$ (määritelmä kuten kaavassa (1)) ja $\|\cdot\|_\infty$ olisivat ekvivalentit avaruudessa $C(0,1)$?

3. Osoita, että avaruuden $C(0,5)$ jono $(1, t, t^2)$ on vapaa. (Tarkastele näiden funktioiden arvoja muutamissa pisteissä.)

4. Osoita, että $c_0 \subset \ell^\infty$ on suljettu aliavaruus (sup–normin suhteen).

5. Osoita, että avaruus ℓ^∞ ei ole separoituva. Neuvo. Olkoon $B \subset \mathbf{N}$ mielivaltainen osajoukko. Tarkastele muotoa $X_B := (a_n)_{n=1}^\infty$ olevia ℓ^∞:n alkioita, missä $a_n = 1$, jos $n \in B$, ja $a_n = 0$, jos $n \notin B$. Huomaa, että $\mathbf{N}$:n osajoukkoja on ylinumeroituva määrä.