FUNKTIONAALIANALYYSI
KEVÄT 2009
LASKUHARJOITUS 12

1. Kuvaus $\lambda : x = (x_k)_{k=1}^{\infty} \mapsto x_1 - x_2 + 10x_8$ on jatkuva ja lineaarinen $\ell^p \to \mathbf{K}$, siis ℓ^p:n duaalin alkio. Mikä ℓ^q:n alkio $y = (y_k)_{k=1}^{\infty}$ vastaa λ:aa samaistuksessa $(\ell^p)^* = \ell^q$ (eli pätee $\langle x, y\rangle = \lambda x$ kaikilla x)? Laske λ:n duaalinormi.
2. Kuten edellisessä tehtävässä, mikä L^q:n alkio vastaa λ:aa, kun $\lambda : L^p(-1, 1) \to \mathbf{R}$,

$$\lambda(f) := \int_{-1}^{1} e^{x^2} f(1 - |x|)dx$$

3.–4. Tiedämme, että Banach–avaruuden $L^p(-1, 1)$ duaali on $L^q(-1, 1)$, kun $1 < p < \infty$ ja $1/p + 1/q = 1$. Duaalipari on

$$\langle f, g\rangle := \int_{-1}^{1} f(x)g(x)dx. \tag{1}$$

Olkoon $w : \Omega \to]0, \infty[$ jatkuva funktio, ja Ω on väli $[0, 1]$, josta on poistettu enintään äärellinen määrä pisteitä. Määritellään painotettu L^p–avaruus

$$L^p_w(-1, 1) := \Big\{ f : [-1, 1] \to \mathbf{R} \text{ mitallinen } \Big| \|f\|_{p,w} := \Big(\int_{-1}^{1} |f(x)|^p w(x)dx \Big)^{1/p} < \infty \Big\}.$$

Tavalliseen tapaan alkiot ovat ekvivalenssiluokkia modulo melkein kaikkialla 0–funktiot. Osoita, että tämän duaali (duaaliparina (1)) on sopivasti valittu painotettu L^q–avaruus, missä q on duaalieksponentti. Neuvo. Käytä hyväksi ensin mainittua painottamatonta dualiteettia, ja määrittele sopivia luonnollisia isometriaoperaattoreita painottamattoman ja painotetun avaruuden välillä. Esimerkkinä painofunktiosta voit ajatella vaikkapa funktiota $w(x) := 1/|x|$.

5. Totea, että jokainen $g \in L^1(0, 1)$ määrittelee avaruuden $C(0, 1)$ duaalin alkion kaavalla

$$f \mapsto \int_{0}^{1} f(x)g(x)dx.$$

Oletetaan, että kerroinkunta on $\mathbf{R}$, että g on jatkuva ja että sillä on äärellinen määrä nollakohtia. Osoita tässä erikoistapauksessa, että g:n duaalinormi on sama kuin $\|g\|_{L^1}$.