

FUNKTIONAALIANALYYSI
KEVÄT 2009
LASKUHARJOITUS 11

1.–2. Tarkastellaan jatkuvien lineaaristen operaattorien $T_n : X \rightarrow Y$ muodostamia perheitä, missä $n \in \mathbf{N}$ sekä X ja Y Banach-avaruuksia. Banach–Steinhausin lauseen mukaan joko

1° on olemassa $M \in [0, \infty[$ jolle

$$\|T_n\| \leq M$$

kaikilla n , tai

2° voidaan löytää lähtöavaruuden X vektori x , jolle

$$\sup_{n \in \mathbf{N}} \|T_n x\|_Y = \infty.$$

Tutki seuraavissa tapauksissa, kumpi vaihtoehto pätee. Mikäli 2° pätee, etsi lisäksi joku vektori $x \in X$, jolla on väitetty ominaisuus.

a) $X := \ell^2$, $Y := \ell^1$, $T_n : (x_k)_{k=1}^\infty \mapsto (x_k \chi_n(k))_{k=1}^\infty$, missä $\chi_n(k) = 1$, jos $k \leq n$ ja $\chi_n(k) = 0$, jos $k > n$.

b) $X = Y = C(0, 1)$, ja T_n on kompositio-operaattori $T_n f = f \circ \varphi_n$, $\varphi_n(t) := t^n$, kun $t \in [0, 1]$.

c) $X = Y = L^2(\mathbf{R})$, $T_n f(x) := f(x/n)$ melkein kaikilla x .

d) $X = Y = \ell_w^2$, joka on painotettu ℓ^2 -avaruus

$$\ell_w^2 := \left\{ x = (x_k)_{k=1}^\infty \mid \|x\|_w := \left(\sum_{k=1}^\infty |x_k|^2 e^k \right)^{1/2} < \infty \right\}$$

ja

$$T_n : (x_k)_{k=1}^\infty \mapsto (x_{k-n})_{k=1}^\infty,$$

missä $x_m := 0$, kun $m \leq 0$.

3. Etsi esimerkki Banach-avaruuden E suljetuista ja rajoitetuista osajoukoista A ja B , joille $A + B := \{x + y \mid x \in A, y \in B\}$ ei ole suljettu.

4.–5. Olkoot E , F ja G Banach-avaruuksia. Kuvaus $A : E \times F \rightarrow G$ on *bilineaarinen*, jos kuvaukset $A_{1,z} : E \rightarrow G$, $A_{1,z}(x) := A(x, z)$ sekä $A_{2,w} : F \rightarrow G$, $A_{2,w}(y) := A(w, y)$ molemmat ovat lineaarisia, kaikilla $w \in E$ ja $z \in F$. Osoita Banach–Steinhausin lauseen avulla, että bilineaarikuvaus A on rajoitettu (eli

$$\|A\| := \sup\{\|A(x, y)\|_G \mid \|x\|_E \leq 1, \|y\|_F \leq 1\} < \infty \quad)$$

jos ja vain jos lineaarikuvaukset $A_{1,z} : E \rightarrow G$ ja $A_{2,w} : F \rightarrow G$ ovat rajoitettuja kaikilla $w \in E$ ja $z \in F$.