FUNKTIONAALIANALYYSIN PERUSKURSSI
KEVÄT 2009
LASKUHARJOITUS 10

1. Suppeneeko operaattorijono $(T_n)_{n=1}^{\infty}$, missä $T_n : L^1(-2,2) \to L^1(-2,2)$, pisteittäin tai normin mielessä, kun $n \to \infty$ ja

$$(T_n f)(x) := \chi_n(x) f(x) \text{ melkein kaikilla } x \in [-2,2]$$

ja χ_n on välin $[-1-1/n, 1+1/n]$ karakteristinen funktio.

2. Samoin, kun

$$(T_n f)(x) := e^{-x^2/n} f(x) \text{ melkein kaikilla } x \in [-2,2].$$

3. Olkoot E ja F Banach–avaruuksia ja $T : E \to F$ rajoitettu lineaarikuvaus, sekä $C > 0$. Oletetaan, että

$$\|Tx\| \geq C\|x\|$$

kaikilla $x \in E$. Näytä, että kuva–avaruus $\mathrm{Im}(T) := \{Tx \mid x \in E\}$ on F:n suljettu vektorialiavaruus.

4. Osoita, että Banach–avaruus $C^1(-5,5)$, joka koostuu välin $[-5,5]$ kerran jatkuvasti derivoituvista funktioista, on Banach–algebra, kun se varustetaan normilla

$$\|f\| := \sup_{x \in [-5,5]} \{|f(x)|\} + \sup_{x \in [-5,5]} \{|f'(x)|\}.$$

5. Etsi sellainen jatkuva injektio $S : \ell^p \to \ell^p$, että kuva–avaruus $\mathrm{Im}(S)$ ei ole suljettu avaruudessa ℓ^p. Vihje. Diagonaalioperaattori $(x_k)_{k=1}^{\infty} \mapsto (a_k x_k)_{k=1}^{\infty}$, missä (a_k) on sopiva kiinteä rajoitettu skalaarijono.