FUNKTIONAALIANALYYSI
KEVÄT 2009
LASKUHARJOITUS 1

1. Ovatko seuraavat reaaliarvoiset funktiot $p : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}$ normeja? Ovatko ne seminormeja? ($x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbf{R}^3$)

a) $p(x) := x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$,

b) $p(x) := |x_1| + 2|x_2| + 5|x_3|$,

c) $p(x) := 5|x_1 - x_2| + 2|x_3|$,

d) $p(x) := |x_1 + 2x_2| + |x_1 - 2x_2| + |x_3|$.

2.–3. Suppeneeko jono $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ avaruudessa $C(0,1)$ (suljetun välin $[0,1]$ jatkuvien funktioiden avaruus varustettuna tavanomaisella sup–normillaan), kun $f_n := f_n(t)$, $t \in [0,1]$ on

a) $\sin(nt)$,

b) $\frac{1}{n}\cos(nt)$,

c) $(1-t)^n$

d) $\sum_{k=1}^{n} t^k$,

e)$\sum_{k=1}^{n} (t/2)^k$?

4. Avaruudessa $C(0,1)$ myös lauseke

$$\|f\|_1 := \int_0^1 |f(t)| dt$$

määrittelee normin. Suppenevatko edellisen tehtävän jonot a)–c) tämän normin mielessä?

5. Onko avaruuden $(C(-2,2), \|\cdot\|_\infty)$ osajoukko

$$X := \{f \in C(-2,2) \mid f(t) = 0 \ \forall t \in [0,1]\}$$

tiheä, eli voidaanko jokaista $C(-2,2)$:n alkioita approksimoida X:n alkioilla mielivaltaisella tarkkuudella? (Vastaus: eipä tietenkään; etsi joku $C(-2,2)$:n alkio f, jolle $\|f - g\|_\infty \geq 1$ kaikilla $g \in X$.)