Lause 6.24 (Liebeck, O'Brien, Shalev, Tiep, 2008). *Jokaisen epäkommutatiivisen äärellisen yksinkertaisen ryhmän jokainen alkio on vaihdannaistaja.*

Yksinkertaisten äärellisten ryhmien luokittelu (Classification of finite simple groups CFSG) on nykyään tärkeä työkalu matemaatikoille. Jos haluaa todistaa jonkun väitteen ryhmäteoriasta, usein jossain vaiheessa todistusta pitää käydä läpi, onko lause totta yksinkertaisille äärellisille ryhmille.

6.4 Ryhmät, joiden kertaluku on pienempi kuin 60

Tässä kappaleessa osoitamme, että ryhmät, joiden kertaluku on aidosti pienempi kuin 60, eivät voi olla yksinkertaisia, elleivät ne ole Abelin ryhmiä. Tästä lähtien sovimme, että yksinkertaisuus tarkoittaa sitä, että ryhmä on ei-Abelin ryhmä ja yksinkertainen.

Tarvitsemme muutaman lemman.

Lemma 6.25. *Jos $|G| = p^n$, silloin G ei ole yksinkertainen.*

Todistus. Todistimme rata-vakauttajalauseen avulla, että $Z(G) \neq 1$ kaikille p-ryhmille, ja lisäksi olemme todistaneet, että $Z(G) \lhd G$, kaikille ryhmillä G. Näin ollen G sisältää epätriviaalin normaalin aliryhmän. □

Lemma 6.26. *Jos ryhmän kertaluku on pq, missä p ja q ovat erisuuria alkulukuja, silloin ryhmä ei ole yksinkertainen.*

Todistus. Voimme olettaa yleisyyttä menettämättä, että $p > q$, silloin $n_p \equiv 1 \mod p$ ja $n_p \mid q$. Tämä pakottaa $n_p = 1$ ja siksi Sylowin p-aliryhmä on normaali. □

Lemma 6.27. *Olkoon $|G| = pr$, missä p on alkuluku ja $p > r \neq 1$. Silloin G ei ole yksinkertainen.*

Todistus. Sylowin lauseen perusteella $n_p \equiv 1 \mod p$ ja $n_p \mid r$, joten $n_p = 1$, ja Sylowin p-aliryhmä on normaali. □

Kirjoittakaamme myös Poincaren lause meille hyödyllisemmässä muodossa.

Lemma 6.28. *Jos G on yksinkertainen ryhmä, ja $H \leq G$, silloin*

$$|G| \mid |G : H|!.$$

Näillä konstein pääsemme eroon jo ryhmistä, joiden kertaluku on joku alkuluvun potenssi, kahden alkuluvun tulo tai muotoa pr.

Mikä tarkoittaa sitä, että luvuista

1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12,13,14,15,16,17,18,19,20,21,22,23,24,25,26,27,28, 29,30,31,32,33,34,35,36,37,38,39,40,41,42,43,44,45,46,47,48,49,50,51,52,53, 54,55,56,57,58,59

Jäljelle jäävät

12,18,24,30,36,40,45,48,50,54,56.

Näistä $18 = 2 \cdot 3^2$, $50 = 2 \cdot 5^2$ ja $54 = 2 \cdot 3^2$, joten kaikissa tapauksissa on Sylowin p-aliryhmä, jonka indeksi on kaksi, joten sen on pakko olla normaali. Jäljelle jäävät:

12,24,30,36,40,45,48,56.

Sylowin lauseen perusteella pääsemme eroon ryhmistä, joiden kertaluvut ovat 40 ja 45. Näissä kummassakin Sylowin 5-aliryhmien määrä on viisi, sillä $n_5 \equiv 1 \mod 5$ ja $n_5 \mid 8, 9$, mikä pakottaa $n_5 = 1$ kummassakin tapauksessa.

Jäljellä ovat

12,24,30,36,48,56.

Nyt käytämme Poincaren argumenttia ryhmiin, joiden kertaluku on 12,24,48 tai 36. Oletetaan, että nämä ovat yksinkertaisia. Ensimmäiset kolme sisältävät Sylowin 2-aliryhmän, jonka indeksi on kolme. Yksinkertaisuuden perusteella $|G| \mid 3!$, mutta tämä ei tietysti ole totta millekään luvuista 12,24,48.

Jos $|G| = 36$, sisältää ryhmä Sylowin 3-aliryhmän, jonka indeksi on 4, mutta $36 \nmid 4! = 16$.

Viimeiset kaksi kertalukua, 30 ja 56 vaativat erillisen argumentin.

Jos 30 alkion ryhmä on yksinkertainen, sisältää se 6 Sylowin 5-aliryhmää ja näin ollen siinä olisi 24 alkiota, joiden kertaluku on 5. Yksinkertaisuus pakottaa sen sisältämään myös 10 Sylowin 3-aliryhmää, joten kertalukua 3 olevien alkioitten määrä on 20. Mutta nyt meillä on jo 44 alkiota ja ryhmän kertaluku on 30. Tämä on selvästi mahdoton yhtälö.

Jos kertaluku on 56 ja ryhmä on yksinkertainen, sisältää se 8 Sylowin 7-aliryhmää. Näissä on yhteensä 48 alkiota, joiden kertaluku on 7. Loppujen 56-48=8 alkion tulee siis muodostaa ryhmän ainoa Sylowin 2-aliryhmä (tällainen on olemassa Sylowin lauseen perusteella), mikä ainoana olisi väistämättä normaali. Ristiriita.

Tehtävä 48. Esseen aiheena voi jatkaa tästä ja miettiä, miksi ei ole yhtään yksinkertaista ryhmää, jonka kertaluku on $60 < |G| < 168$.

7 Ryhmälaajennukset: puolisuorat tulot ja köynnöstulot

Yksinkertaisista ryhmistä puhuessa todistettiin Jordan-Hölderin lauseen, jota asetti yksinkertaiset ryhmät tärkeään asemaan äärellisten ryhmien rakennuspalikoina. Toisaalta ensimmäisessä luvussa tarkasteltiin ryhmiä, joiden kertaluku on 2^n ja todettiin, että näitten lukumäärä kasvaa todella nopeasti n:n kasvaessa. On selvää, että jokaisen ryhmän, jonka koko on 2^n kompositiojono sisältää tekijäryhminä pelkästään ryhmiä C_2 ja on näin ollen myös ratkeava. Kahden alkion syklinen ryhmä on tietysti yksinkertaisesta ryhmistä yksinkertaisin, ja silti siitä voidaan koota suuri määrä monimutkaisia ryhmiä. On olemassa siis monta eri tapaa koota kahdesta ryhmästä kolmas. Tässä luvussa tutustumme kahteen uuteen tapaan rakentaa uusia ryhmiä vanhoista.

Abelin ryhmien kappaleessa tutuistuimme (ulkoisen) suoran tulon käsitteeseen. Olkoot $G_1, \ldots, G_n$ ryhmiä. Muodostamme karteesisen tulon $G := G_1 \times G_2 \times \cdots \times G_n$ ja tälle joukolle määrittelemme kaksipaikkaisen operaation yksinkertaisesti $(g_1, \ldots, g_n)(h_1, \ldots, h_n) = (g_1h_1, \ldots, g_nh_n)$, eli jokaisessa komponentissa i tulo noudattaa ryhmän G_i tuloa.

Esimerkki 7.1. Otetaan C_3 ja C_2 kaksi syklistä ryhmää. Niiden suora tulo on ryhmä $C_3 \times C_2 \cong C_6$.

Tämä esimerkin taustalla on se, että kahden joukon C_3 ja C_2 karteesiselle tulolle, voidaan antaa ryhmärakenne. Toisaalta samaisten kahden joukon karteesiselle tulolle voidaan antaa toinenkin ryhmä rakenne, eli tietysti S_3. Tarkastellaan tätä alkioitten tasolla. Merkitään C_2:n alkioita $1, a$ ja C_3:n alkioita $1, b, b^2$. Silloin karteesisen tulon alkiot ovat $(1,1), (b,1), (b^2,1), (1,a), (b,b), (b^2,a)$. Jos määrittelemme kertolaskun komponenttien mukaan, saamme vain suoran tulon, mutta voimme määritellä kertolaskuun myös pienen kierron. Unohdetaan siis merkinnästä sulut ja pilkut. Tavoitteena on kertoa esim. $b^2a * ba = b^2a * aa^{-1}ba = b^2a^{-1}ba$. Jos tämä ei olisi ulkoinen konstruktio, tietäisimme, miten konjugoida alkiota b alkiolla a. Nyt emme tiedä, mikä itseasiassa antaa meille vapauden päättää itse, minne konjugaatio lähettää tämän alkion. Voimme siis määritellä a:n tuottamaan tietyn C_3:n automorfismin. Jos määrittelemme automorfismiksi identiteetin, saamme suoran tulon. Jos taas määritämme automorfismiksi $1 \mapsto 1, b \mapsto b^2, b^2 \mapsto b$, saamme uuden ryhmärakenteen, joka tuottaa seuraavan kertolaskutaulukon 9.

Kuten jo kurssin alussa totesimme, kuuden alkion joukolla on täsmälleen kaksi ryhmärakennetta. Tässä esimerkissä laajennettiin ryhmää C_3 ryhmällä C_2, saatiin kaksi eri ryhmärakennetta, nimittäin $C_2 \times C_3$ ja S_3. Jälkimmäinen voidaan ylläolevan konstruktion perusteella esittää rakenteella, jota

Taulukko 9: Kuuden alkion epäkommutatiivinen ryhmä

$*$	1	a	b	ab	b^2	ab^2
1	1	a	b	ab	b^2	ab^2
a	a	1	ab	b	ab^2	b^2
b						
ab						
b^2	b^2		1			
ab^2						

kutsutaan puolisuoraksi tuloksi. Tämä ei ole ihan vieras käsite. Huomaamme jatkossa, että kaikki diedriryhmät D_{2n} ovat puolisuoria tuloja.

7.1 Puolisuorat tulot

Määritelmä 7.2. Ryhmää G kutsutaan ryhmän K laajennukseksi ryhmällä H, jos

$$K \lhd G \text{ ja } G/K \cong H.$$

Ryhmän laajennus ei ole yksikäsitteinen, kuten jo yllä olevasta esimerkistä huomasimme. Huomaa, että ryhmän laajennuksissa H:n ei välttämättä tarvitse olla G:n aliryhmä.

Voimme merkitä tällaista laajennusta kätevästi lyhyellä eksaktilla jonolla

$$1 \to K \to G \to H \to 1.$$

Seuraava konsruktio yleistää suoraa tuloa ja sitä kutsutaan ryhmien K ja H puolisuoraksi tuloksi, sillä se joukkojen K ja H karteesinen tulo.

Olkoot K ja H ryhmiä, ja olkoon $\phi : H \longrightarrow Aut(K)$ homomorfismi. Muotostamme joukon $K \rtimes_\phi H = \{(k,h) : k \in K, h \in H\}$ ja määrittelemme kahden alkion kertolaskun tässä ryhmässä $(k_1,h_1)(k_2,h_2) := (k_1 k_2^{\phi(h_1)}, h_1 h_2)$. Erona suoraan tuloon on se, että ennen kertolaskua K:ssa, alkio k_2 kuvataan joksikin toiseksi alkioksi automorfismilla $\phi(h_1)$.

Huomautus 7.3. Puolisuoraa tuloa määritellessä pitää aina sopia homomorfismi $\phi : G \longrightarrow Aut(K)$, ja on hyväksi merkitä tämä myös puolisuoran tulon merkkiin.

Viimeksi osoitimme, että $G = K \rtimes_\phi H$ on ryhmä. Liitännäisyys on hankalin, mutta kyllä sekin kärsivällisyydellä menee. Jos et ollut luennolla, tee tämä harjoitustehtävänä.

Tehtävä 49. Osoita , että aliryhmä $K_1 = \{(k, 1) : k \in K\}$ on G:n normaali aliryhmä, joka on isomorfinen K:n kanssa. Osoita myös, että $H_1 = \{(1, h) : h \in H\}$ on isomorfinen H:n kanssa. Ja lopulta myös, että $K \rtimes_\phi H = K \times H$ jos ja vain jos $h\phi = 1$ kaikille $h \in H$.

Yllä oleva konstruktio on ulkoiselle puolisuoralle tulolle. Sisäinen versio tästä saadaan seuraavasti. Jos on niin, että $K \lhd G$ ja $H \leq G$ sekä $G = HK$ ja $H \bigcap K = 1$, kutsumme H:ta K:n komplementiksi G:ssä. Tässä tapauksessa voimme käyttää merkintää

$$G = K \rtimes H,$$

ja sanoa, että laajennus halkeaa. Huomaa, että pikkukolmion kärki osoittaa normaaliin aliryhmään päin. Halkeavassa laajennuksessa, voimme kirjoittaa jokaisen G:n alkion yksikäsitteisesti hk, jossa $h \in H$ ja $k \in K$. Tämä, sillä $h_1 k_1 = h_2 k_2$ johtaa siihen, että $h_2^{-1} h_1 = k_2 k_1^{-1} = H \bigcap K = 1$.

Esimerkki 7.4. Diedriryhmä $D_{2n} = C_n \rtimes_\phi C_2$, missä $C_2 =< t >$ ja t indusoi kuvauksen, joka kuvaa jokaisen a :n sen käänteisalkioon ryhmässä $C : n$ Voimme yleistää tämän konstruktion tapaukseen, jossa $C : n$ on ääretön syklinen ryhmä. Diedriryhmä $D_\infty = \mathbb{Z} \rtimes_\phi C_2$, missä $C_2 =< t >$ ja edelleen t indusoi kuvauksen, joka kuvaa jokaisen a:n sen käänteisalkioon ryhmässä $\mathbb{Z}$.

Esimerkki 7.5. Tarkastellaan puolisuoraa tuloa $A_5 \rtimes C_2$. Määritellään ensiksi ryhmän A_5 automorfismit. Kaikki sen automorfismit ovat sisäisiä automorfismeja, joten ryhmä C_2 indusoi sisäautomorfismin, ja toimii siis normaalisti konjugoimalla. Voimme valita alkioksi $t \in C_2$, minkä tahansa involuution, eli kakkosyklin, esimerkiksi (12). Koska puolisuorassa tulossa $A_5 C_2 = G$ ja tiedämme, että viitossykli ja kakkossykli generoivat ryhmän S_5 on puolisuoran tulon pakko olla isomorfinen ryhmän S_5 kanssa.

7.2 Tapettikuviot

Kun mikä tahansa kaksiulotteinen taso on jaettu osiin tai koristeltu, voidaan sille antaa symmetriaryhmä. Usein symmetriaryhmä on vain triviaaliryhmä, mutta esimerkiksi tiiliseinän ryhmä ei ole triviaali, jos tiiliseinä on muurattu jonkun säännöllisen järjestelmän mukaan. Tiiliseinän symmetriaryhmä riippuu siitä, minkä muotoisia tiilet ovat, kuten myös siitä, miten ne on aseteltu limittäin.

Voimme ryhmäteorian avulla luokitella kaikki mahdolliset kaksiulotteiset tapettikuviot. Jotta käsite olisi järkevä ryhmäteoreettisesti oletamme aina, että peitämme tapettikuviolla äärettömän tason.

Määritellään ensin ryhmäteoreettisia perusteita.

Määritelmä 7.6. Tason $\mathbb{R}^2$ isometria on surjektiivinen kuvaus $\tau : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, joka säilyttää etäisyydet.

Esimerkkejä isometrioista ovat kierrot, siirrot, peilaukset sekä liukupeilaukset.

Siirto ja kierto säilyttävät orientaation, peilaukset ja liukupeilaukset kääntävät sen.

Propositio 7.7. *Jokainen $\mathbb{R}^2$:n aito (suunnat säilyttävä) isometria on joko kierto tai siirto. Jokainen epäaito isometria (eli suunnat kääntävä) on joko peilaus tai liukupeilaus.*

Tason $\mathbb{R}^2$ kaikki isometriat muodostavat ryhmän. Voidaan ajatella näitä tiettynä 2×2-matriisien ryhmänä. Kuvan perusteella kahden aidon tai epäaidon isometrian tulo on aina aito isometria, kun taas aito ja epäaito ovat tulona epäaito.

Tapettikuvion perusajatus on, että siinä on joku kuvion perusyksikkö, joka toistuu jaksottain ja äärettömästi kahdessa dimensiossa, kahden eiparalleelin akselin suuntaisesti. Oletamme, että tämä peruskuvion toisto täyttää koko tason. Tämä jaksoittainen, mutta epäjatkuva toistuminen tarkoittaa sitä, että käsittelemme $\mathbb{R}^2$:n diskreettejä isometrioita.

Määritelmä 7.8. $\mathbb{R}^2$:n isometriaryhmä G on diskreetti jos ja vain jos, jokaista pistettä $p \in \mathbb{R}^2$ kohden on olemassa ympyrä Y_p, jonka keskipiste on p ja jokainen $g \in G$ joko kiinnittää pisteen p tai siirtää sen pisteeseen gp, joka on tämän ympyrän Y_p ulkopuolella.

Tapettikuvioryhmä on eräs diskreettin ryhmän muoto. Tässä tapauksessa tasosymmetria ryhmä.

Määritelmä 7.9. Tasosymmetriaryhmä on $\mathbb{R}^2$:n isometria ryhmän diskreetti aliryhmä, joka sisältää siirrot s, t kahteen ei-paralleeliin suuntaan.

Olkoon G on tällainen ryhmä, ja olkoon $p \in \mathbb{R}^2$. Silloin kun käytämme isometrioita $s^i t^j$ missä $i, j \in \mathbb{Z}$ pisteeseen p, saamme tulokseksi äärettömän hilan.

Jos valitsemme s, t:n pienimmiksi mahdollisiksi siirroiksi, tiedämme, että jokainen siirto on muotoa $s^i t^j$. Ja näiden 'vektorien' väliin jäävää aluetta kutsutaan hilan perusalueeksi (fundamental domain). Joka tapauksessa, siirtojen ryhmä vaatii vain kaksi virittäjää ja se on isomorfinen ryhmän $\mathbb{Z}^2$ kanssa, koska siirrot ovat luonnollisesti vaihdannaisia.

Tehtävä 50. Ylläolevan määritelmän nojalla yksinkertaisin tasosymmetriaryhmä on $\mathbb{Z}^2$. Kuviossa ei siis ole ollenkaan kiertosymmetriaa. Etsi tällainen jostain ympäristöstäsi ja piirrä tai ota siitä kuva digi/kännykkäkameralla, jos omistat sellaisen.

On kuitenkin olemassa myös tapettikuvioita, joissa on jonkunlaista kierto- tai peilisymmetriaa.

Tarkastellaan siis seuraavaksi mahdollisia kiertoja. Oletetaan, että t on pienin siirto ja r kierto, jonka kulma on pienin mahdollinen $\theta = \frac{2\pi}{n}$

Valitaan kolme pistettä c_0, c_1, c_1' niin, että t siirtää c_0:n c_1:een, ja r siirtää pisteen c_1 pisteeseen c_1'. Nyt alkio $t' = rtr^{-1}$, joka kuuluu ryhmään G, on siirto, joka siirtää pisteen c_0 pisteeseen c_1'. Ja sitten alkio $t't^{-1}$ on siirto, joka siirtää c_1:n pisteeseen c_1'. Koska t oli valittu pienimmäksi mahdolliseksi, näemme, että etäisyys c_1c_1' ei voi olla lyhyempi kuin c_0c_1. Tämä tarkoittaa sitä, että kulma $c_1c_0c_1'$ on ainakin $\pi/3$. Tästä seuraa, että $\frac{2\pi}{n} \geq \frac{\pi}{3}$, joten $n \leq 6$.

Tehtävä 51. Osoita, että $n = 5$ ei myöskään toimi.

Lause 7.10. *Olkoon G tasosymmetriaryhmä. Silloin siihen kuuluvat kierrot ovat kertalukua 1,2,3,4 tai 6.*

Seuraavaksi tarkastelemme, minkälaisia hiloja tasosymmetriaryhmä voi tuottaa. Tavoitteena on todistaa, että niittä on viittä eri perustyyppiä.

Unohdetaan siirrot hetkeksi, ja tarkastellaan kiertojen tuottamaa hilaa. Jokaisella hilalla on luonnollinen kiertosymmetria kulman π ympäri (jompikumpi hilan luonnollinen akseli).

Tarkastellaan nyt kiertoa, jonka kertaluku on 3. On olemassa kaksi eri tapausta riippuen siitä, onko kierron keskipiste hilan piste vai ei. Itseasiassa kumpikin näistä tapauksesti antaa identtisen hilan, joka koostuu tasasivuisista kolmioista. Tällaisessa hilassa on myös kertalukua 6 oleva kierto jokaisen hilan pisteen ympäri. Tällaista hilaa kutsutaan heksagonaaliseksi hilaksi.

Jos taas kierron kertaluku on 4, edelleen kierron keskipiste on joko hilan piste tai ei. Joka tapauksessa, kumpikin antaa lopulta neliöhilan.

Toiseksi tarkastelemme hiloja, joilla on peilisymmetria, jonkun suoran suhteen. Huomaa, että tämä suora ei välttämättä sisällä yhtään hilan pistettä. Koska peilauksen pitää toimia yhdessä kiertojen kanssa (ääretön kuvia, joka toistuu), peilisymmetriaa sisältävä hila ei voi olla heksagonaalinen. Tällainen hila on väistämättä koottu joko nelikulmioista tai timanteista (tasasivuinen suunnikas). Jos hilassa on liukupeilauksia, on se väistämättä koottu timanteista, eli on keskitetyn nelikulmiohilan muotoinen.

On siis vain viittä eri hilatyyppiä, joiden kuvat voit piirtää alle.

Jatketaan hilan lokaalia tarkastelua, jonkun pisteen ympäristössä, sillä siirrot jo hallitsemme.

Määritelmä 7.11. Kaksiulotteinen kristallograafinen **pisteryhmä** K on $\mathbb{R}^2$:n sellaisten isometrioitten ryhmä, joka kiinnittää pisteen p ja kuvaa 2-dimensioisen hilan, joka sisältää p:n itseensä.

Tällaisessa ryhmässä ei voi olla siirtoja tai liukupeilauksia, sillä kumpikaan niistä ei kiinnitä mitään pistettä p. Siispä kaikki K:n alkiot ovat joko kiertoja tai puolet niistä ovat kiertoja ja puolet ovat peilauksia, joten koska kiertojen kertaluvut ovat 1,2,3,4,6 on ryhmä K isomorfinen joko C_n tai D_{2n}:n kanssa kun $n = 1, 2, 3, 4, 6$.

Lopulta osoitamme, että tapettiryhmä koostuu sekä siirtoryhmästä, että pisteryhmästä ja itseasiassa on näiden kahden puolisuora tulo, eli $G \cong H \rtimes K$.

Tarkemmin, osoitamme, että on olemassa homomorfismi $\phi : G \longrightarrow K$ ja $Ker\phi = H$ ja $G/H \cong K$.

Valitaan piste O tasolta $\mathbb{R}^2$. Jos ρ on mikä tahansa isometria, joka siirtää pisteen O pisteeseen a, ja t on siirto, joka siirtää pisteen a pisteeseen O, silloin $s = t^{-1}\rho$ kiinnittää pisteen O, mikä tarkoittaa sitä, että s on joko kierto pisteen O ympäri tai peilaus sellaisen viivan suhteen, joka menee O:n läpi. Nyt voimme kirjoittaa isometrian $\rho = ts$.

Tiedämme, että siirtoaliryhmä T on normaali aliryhmä ryhmässä kaikkien isometrioitten ryhmässä E. Määritellään $H = T \cap G$, joka on siirtoaliryhmä diskreetissä ryhmässä G. Silloin $H \lhd G$.

Oletetaan, että $g_1 = t_1 s_1$ ja $g_2 = t_2 s_2$ ovat kaksi ryhmän g alkiota, jossa t_i on siirto ja s_i kierto tai peilaus, kuten yllä. A priori, emme oleta, että $s_i, t_i \in G$. Nyt

$$g_1 g_2 = t_1 s_1 \cdot t_2 s_2 = t_1 \cdot s_1 t_2 s_1^{-1} \cdot s_1 s_2,$$

jossa $s_1 t_2 s_1^{-1}$ on siirto ja $s_1 s_2$ kiinnittää pisteen O (koska kumpainenkin, s_1 ja s_2 kiinnittää sen).

Samalla tavalla voimme kirjoittaa alkion

$$g_1^{-1} = (t_1 s_1)^{-1}$$

muotoon

$$s_1^{-1} t_1^{-1} s_1 s_1^{-1},$$

missä s_1^{-1} on kierto O:n ympäri, ja $s_1^{-1} t_1^{-1} s_1$ on siirto.

Muistamme, että s_i oli alunperin alkio $t^{-1}\rho$, mutta nämä operaatiot osoittavat, että itseasiassa tällaiset alkiot s_i hajotelmissa $g_i = t_i s_i$ muodostavat ryhmän K, joka kiinnittää pisteen O.

Näin ollen kuvaus $\theta : G \longrightarrow K$, joka kuvaa $\theta(g_1) = \theta(t_1 s_1) = s_1$ on surjektio G:stä ryhmään K. Sen ydin on $Ker\theta = H$. Jos nyt vielä annamme H:n alkioiden toimia pisteeseen O, huomaamme, että näin saamme muodostettua hilan L.

Oletetaan nimittäin, että $a \in L$, joten $a = tO$, jollekin sopivalle $t \in H$. Olkoon $s \in K$. Silloin on olemassa $g \in G$ siten, että $g = t_1 s$, jollekin sopivalle $t_1 \in T$. Koska

$$sa = stO = t_1^{-1} gtO = t_1^{-1} gtg^{-1} gO = t_1^{-1} gtg^{-1} t_1 sO.$$

Mutta s kiinnittää O:n ja gtg^{-1} siirtää hilan itseensä, joten $sa = gtg^{-1}O$ on piste hilassa L, joten $K \cong G/H$ on pisteryhmä, joka kuvaa hilan, jonka määrittävät ryhmä H ja piste O itseensä.

Jotta siis saisimme luokiteltua ryhmät G jotka ovat tapettikuvioryhmiä, pitää meidän määritellä hila L, piste O ja pisteryhmä K. Tässä emme käy luokittelua läpi, mutta toteamme, että ylläolevan proseduurin mukaisesti tämä on täysin mahdollista.

Tarkastellaan paria esimerkkiä kuvallisesti.

Yksinkertaisin tapettikuvioryhmä on $\mathbb{Z}^2$. Sen hila koostuu suunnikkaista, joiden sivujen pituudet ovat erisuuret. Heksagonaalisessa hilalla voi olla monta symmetriaryhmää, ja ne riippuvat koristeluista.

Yksi tapettikuvioryhmä on $\mathbb{Z}^2 \rtimes C_2$, jossa C_2 toimii $\mathbb{Z}$:ssa kääntämällä kunkin alkion. Tämän ryhmän tapettikuvio on klassinen symmetrinen köynnös yhteen suuntaan.

Liukupeilaus saadaan vain keskitetyn neliöhilan suhteen.

Tehtävä 52. Gradun aihe: Mikä on ryhmän $\mathbb{Z}^2 \rtimes C_2$ aliryhmäin kasvu? Miten karakteroisit aliryhmiä? Vertaa tätä aliryhmän kasvu funktiota ryhmän $\mathbb{Z}^2$ vastaavaan. Mitä huomaat?

7.3 Lampunvartijan ryhmä ja köynnöstulot

Tapettikuvioryhmien luvussa käsittelimme puolisuoran tulon käsitettä. On myös hankalampi ryhmä, jonka voimme luoda kahden ryhmän tulona. Tämä on niin kutsuttu köynnöstulo.

Köynnöstulo määritellään helpoiten ryhmän toimintojen avulla. Olkoot siis H ja K ryhmiä, joista H toimii joukossa $|\Gamma| = g$ ja K joukossa $|\Delta| = d$. Haluamme määritellä ryhmän, joka toimii transitiivisesti joukossa $\Omega = \Gamma \times \Delta$.

Määrittelemme köynnöstulon kantaryhmäksi ryhmän, joka muodostuu kuvauksista $f : \Delta \to H$. Ryhmäoperaatio on pisteittäinen kertolasku, eli $f_1 f_2(\delta) := f_1(\delta)\mathfrak{f}_2(\delta)$. Tämän operaation suhteen $\mathcal{F}(\Delta, H) \cong H^d$. Tämä siis tarkoittaa sitä, että meillä on H:n kopioita yhteensä d kappaletta, ja ne on numeroitu Δ:n alkioilla.

Kantaryhmä toimii joukossa Ω seuraavasti

$$(\gamma, \delta)f = (\gamma f(\delta), \delta).$$

Kun taas ryhmä K toimii permutoimalla H:n kopiot

$$(\gamma, \delta)k = (\gamma, \delta k).$$

Määrittelemme ryhmän $HwrK = B \rtimes K = \{fk : f \in B, k \in K\}$. Puolisuorassa tulossa K:n toiminta B:ssä on juuri sellainen kuin odotamme, eli $f_1k_1f_2k_2 = f_1f_2^{k_1^{-1}}k_1k_2$, missä

$$f^k(\delta) := f(\delta k^{-1})$$

Tutkikaamme pienintä mahdollista esimerkkiä C_2wrC_2, jotta saamme jotain järkeä tähän rakenteeseen. Ensiksikin ryhmän koko on 2^3, sillä kantaryhmä on $C_2 \times C_2$, jossa C_2 toimii vaihtamalla C_2:n kopiot. Ryhmä on siis $(C_2 \times C_2) \rtimes C_2$. Laadimme Cayleyn taulukon tästä ryhmästä. Merkitään alkioita $(aa)a$, jossa $a^2 = 1$.

Taulukko 10: kertolaskutaulu ryhmälle C_2wrC_2

*	(11)1	(1a)1	(a1)1	(aa)1	(11)a	(1a)a	(a1)a	(aa)a
(11)1	(11)1	(1a)1	(a1)1	(aa)1	(11)a	(1a)a	(a1)a	(aa)a
(1a)1	(1a)1	(11)1	(aa)1	(a1)1	(1a)a	(11)a	(aa)a	(a1)a
(a1)1								
(aa)1								
(11)a								
(1a)a								
(a1)a								
(aa)a								

Tehtävä 53. Täydennä ylläoleva taulukko ja päättele, mikä ryhmä on kyseessä. Luokittelimme viisi kertalukua kahdeksan olevaa ryhmää ensimmäisessä luvussa.

Tehtävä 54. Kuinka monta alkiota on ryhmässä S_5wrC_3? Osoita, että ryhmän S_n Sylowin p-aliryhmä on köynnöstulo.

7.4 Lampunvartijan ryhmä

Kutsumme köynnöstuloa $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})wr\mathbb{Z}$ lampunvartijan ryhmäksi, ja merkitsemme sitä kirjaimella L. Köynnöstulon kantaryhmä B on

$$\bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} \mathbb{Z}/2\mathbb{Z},$$

ja tämän perusteella L/B on isomorfinen ryhmän $\mathbb{Z}$ kanssa.

Jos haluamme kuvailla ryhmää virittäjien ja suhteitten avulla, vakioesitys lampunvartijan ryhmälle annetaan köynnöstulon rakenteen kautta

$\langle a, t : [t^m a t^{-m}, t^n a t^{-n}], m, n \in \mathbb{Z}\rangle$. Esitystä voidaan yksinkertaistaa $\langle a, t : (at^n at^{-n})^2, n \in \mathbb{Z}\rangle$. Näiden lisäksi $a^2 = 1$.

Ryhmän nimi tulee ryhmän hyödyllisestä visualisoinnista. Voimme ajatella tämän ryhmän toimivan kumpaankiin suuntaan äärettömässä jonossa katulamppuja $..., l_{-2}, l_{-1}, l_0, l_1, l_2, ...$, (huomaa, että nämä on indeksoitu ylemmän ryhmän alkioilla). Jokainen näistä lampuista voi joko palaa tai olla sammutettu. Lisäksi jonkun lampun, sanokaamme, l_k:n alla seisoo lampunvartija. Ryhmän virittäjä t kehottaa lampunvartijaa kulkemaan seuraavalle lampulle (vastaavasti t^{-1} kehottaa lampunvartijaa kulkemaan edelliselle lampulle), kun taas virittäjä a ilmoittaa, että lampun l_k status muuttuu, eli jos lamppu palaa, sammutetaan se, ja jos lamppu on sammuksissa, sytytetään se.

Lyhyesti, ryhmän alkio siis toimii äärellisenä jonona siirtoja. Lampun vartija lähtee lampusta l_k liikkeelle, kulkee tietyille lampuille, sammuttaa tai sytyttää ne, ja pysähtyy lampulle l_m. Tämän perusteella on helpompi ymmärtää virittäjiä ja suhteita.

Voimme olettaa, että vain äärellinen määrä lamppuja on sytytettynä minä tahansa hetkenä, koska minkä tahansa L:n alkion toiminta muuttaa korkeintaan äärellisen määrän lamppuja. Tämä ei kuitenkaan estä sitä, että rajoittamaton määrä lamppuja olisi sytytettynä.

Ryhmän toiminta on tämän vuoksi samankaltainen/samanlainen Turingin koneen toiminnan kanssa.

Tehtävä 55. Millainen on ryhmä $\mathbb{Z} wr C_2$? Miten se eroaa äärettömästä diedriryhmästä $\mathbb{Z} \rtimes_\phi C_2$, jossa ϕ toimii käänteisoperaationa.

Lopuksi tutkimme ryhmää $\mathbb{Z} wr \mathbb{Z}$.

Tämän ryhmän alkiot ovat muotoa (f, n), jossa $f : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{Z}$, joten $B \cong (\Pi_{n\in\mathbb{Z}}\mathbb{Z})$ kanssa. Tämän alkiot ovat muotoa $(f, 0)$. Luonnollisesti $\mathbb{Z} wr \mathbb{Z} = B \rtimes \mathbb{Z}$, jossa $\mathbb{Z}$ toimii joukossa B luonnollisesti permutoimalla. Kertolasku ryhmässä on määritelty $(f, n)(h, m) = (k, n + m)$, missä $k(i) = f(i)+h(i+n)$. Konjugointi alkiolla $(0, 1)$ toimii seuraavasti: $(f, n)^{(0,1)} = (g, n)$, jossa $g(i) = f(i+1)$, joten konjugointi siirtää kuvaa yhden pykälän eteenpäin.

Tehtävä 56. Olkoon

$$f(n) = \begin{cases} 1 & \text{, jos n on parillinen} \\ -1 & \text{, jos n on pariton.} \end{cases}$$

Laske $(f, 0)^{(0,1)}$.