5 Platonin kappaleet ja niiden symmetriaryhmät

Ensimmäisissä luvussa käsittelimme ryhmäteorian peruskonsepteja niin kuin ne on 1800- ja 1900-luvuilla määritelty. Nyt palaamme ajassa taaksepäin, ja tutkimme, mitä antiikin kreikkalaiset tiesivät symmetriasta.

Pythagoras tunsi kolme säännöllistä kolmiulotteista kappaletta. Kuutio ja tetraedri olivat hyvin tuttuja, ja näiden perusteella hän myöhemmin konstruoi myos dodekaedrin.

Platon tai hänen oppilaansa lisäsivät joukkoon oktaedrin ja ikosaedrin, sekä todistivat, että nämä ovat ainoat säännölliset monitahokkaat kolmessa ulottuvuudessa. On tavallaan mielenkiintoista, että Pythagoras ei konstruoinut oktaedria, sillä se on kuitenkin kuution duaalikappale.

Määritelmä 5.1. Platonin kappale on säännöllinen monitahokas, jonka tahkot ovat keskenään yhteneviä säännöllisiä monikulmioita, ja jonka jokaisesta kärjestä lähtee yhtä monta särmää.

Lause 5.2. *Platonin kappaleita on korkeintaan viisi.*

Todistus. Oletetaan, että säännöllinen monikulmio on n-kulmio, ja jokaisesta kärjestä lähtee k särmää. Todistamme, että mahdollisia pareja (n, k) on korkeintaan viisi.

Merkitään säännöllisen n-kulmion sisäkulmaa α:lla, ja tämän komplementtikulmaa β:lla. Tällöin $\beta = \frac{2\pi}{n}$, joten $\alpha = \pi - \beta = \pi(1 - \frac{2}{n})$.

Jokaisesta kärjestä lähtee k särmää. Koska nämä särmät eivät kohtaa tasossa, saamme epäyhtälön $k\alpha < 2\pi$, josta seuraa

$$k\pi(1 - \frac{2}{n}) < 2\pi$$

$$k(n-2) < 2n$$

$$(k-2)(n-2) < 4.$$

Koska monitahokas on kolmiulotteinen, $k, n \geq 3$. Ainoat kokonaislukuparit (n, k), jotka toteuttavat ylläolevan epäyhtälön ovat $(3, 3), (3, 4), (4, 3), (3, 5), (5, 3)$. $\square$

Merkitään K monitahokkaan kärkien määrää, S särmien lukumäärää ja T tahkojen lukumäärää. Kokoamme taulukkoon ylläolevat viisi lukuparia, sekä kärkien, särmien ja tahkojen määrä kullekin monitahokkaalle.

Taulukko 5: Platonin kappaleet

nimi	K	S	T	n	k
tetraedri	4	6	4	3	3
kuutio	8	12	6	4	3
oktaedri	6	12	8	3	4
dodekaedri	20	30	12	5	3
ikosaedri	12	30	20	3	5

Huomautus 5.3. Platonin kappaleet toteuttavat Eulerin kaavan $K - S + T = 2$. Tämän näkee helpohkosti projisoimalla kunkin kappaleen tasoon planaariverkoksi.

Koska Platonin kappaleet elävät kolmiuloitteisessa avaruudessa on niiden symmetriaryhmä äärellinen $\mathrm{GL}_3(\mathbb{R})$:n aliryhmä. Symmetriaryhmä ei myöskään saa muuttaa etäisyyksiä joten ainoastaan alkiot, joiden determinantti on ± 1 kelpaavat. Jos rajoitamme etsintämme vain kiertosymmetrioihin, voimme tutkia vain $\mathrm{SL}_3(\mathbb{R})$:n äärellisiä aliryhmiin. Helpoiten hahmotamme nämä ryhmät kuitenkin ryhmän toimintojen ja ratojen avulla kuten alkusanoissa mainittiin. Joten ennen kuin pääsemme käsiksi ryhmiin, tarvitsemme lisää teoriaa. Jotkut teistä varmasti oppivat nämä asiat jo Algebra II:ssa, mutta kertaus ei liene pahitteeksi.

Esimerkkinä toiminnasta katsokaamme säännöllisiä monitahokkaita seuraavasta näkökulmasta. Huomaamme yleisesti, että mikä tahansa symmetria, jonka determinantti on 1, on kierto jonkun suoran L ympäri. Jos symmetria on epätriviaali, tämä suora L leikkaa Platonin kappaleen pinnan täsmälleen kahdessa pisteessä P ja Q. Mitä vaihtoehtoja on pisteelle P?

Oletetaan että P on jollain tietyllä sivutahkolla. Silloin se voi olla kärjessä, särmällä tai tahkon sisäpinnassa. Jos P on särmällä, mutta ei kärjessä, huomaamme ensin, että kiertosymmetria kiinnittää sekä pisteen P että särmän, jolla P sijaitsee, mutta se vaihtaa särmän päissä olevat kärjet (muussa tapauksessa symmetria ei ole kierto), joten P:n pitää olla särmän keskipisteessä.

Samalla tavalla voimme argumentoida, että jos P on tahkon sisäpinnalla, on sen pakko olla tahkon keskipisteessä.

Määritelmä 5.4. Olkoon G ryhmä ja Ω joukko. Ryhmä G toimii joukossa Ω, jos on olemassa kuvaus $\Omega \times G \to \Omega$, jossa $(\omega, g) \mapsto \omega * g$ joka toteuttaa seuraavat ehdot: (i)

$$\omega * 1 = \omega$$

(ii)
$$\omega * (gh) = (\omega * g) * h$$

Tätä kutsutaan vasemmaksi toiminnaksi, koska kohdassa (ii) vasemmanpuoleinen alkio toimii ensin. Oikeanpuoleinen toiminta määritellään vastaavalla tavalla.

Lemma 5.5. *Toimikoon G joukossa Ω. Tällöin jokainen $g \in G$ indusoi kuvauksen*

$$\begin{aligned} \phi_g : \quad & \Omega \to \Omega, \\ & \alpha \mapsto \alpha * g \end{aligned}$$

joka määrittää joukon Ω permutaation.

Tämän lisäksi, kuvaus

$$\begin{aligned} \phi : \quad & G \to Sym(\Omega) \\ & g \mapsto \phi_g \end{aligned}$$

on ryhmähomomorfismi. Tätä kutsutaan myös G:n permutaatioesitykseksi.[1]

Todistus. On selvää, että kuvauksen ϕ_g käänteiskuvaus on $\phi_{g^{-1}}$, koska jokaiselle $\alpha \in \Omega$ pätee

$$\alpha(\phi_g \phi_{g^{-1}}) = (\alpha * g) * g^{-1} = \alpha * g * g^{-1} = \alpha * 1 = \alpha.$$

Olemme todistaneet, että kuvaus $\phi_g : \Omega \to \Omega$ on bijektio, ja näin ollen se on permutaation määritelmän mukaan Ω:n permutaatio. Ryhmän toiminnan määritelmän kohdasta (i) seuraa, että

$$\phi(g_1 g_2) = \phi_{g_1 g_2} = \phi_{g_1}\phi_{g_2} = \phi(g_1)\phi(g_2),$$

joten $\phi : G \to Sym(\Omega)$ on homomorfismi. □

Tehtävä 29. 1. Olkoon G ryhmä, G toimii itsessään konjugaation kautta. Tarkemmin, kiinnitetään $h \in G$, nyt jokaiselle $g \in G$ toiminta määritellään $g \mapsto h^{-1}gh$ kautta. Osoita, että tämä on toiminta. Onko tämä vasen vai oikea? Jos haluamme määritellä vastakkaistoiminnan, mikä on oikea määritelmä?

[1] Permutaatioesitykset ovat tärkeitä esitysteoriassa. Valitettavasti tällä kurssilla meillä ei ole aikaa perehtyä ryhmien esitysteoriaan. Jos joku haluaa, voi tästä aiheesta laatia esseen.

2. Olkoon $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ kääntyvien $n \times n$-matriisien ryhmä. Määrittele $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$:lle luonnollinen toiminta avaruudessa $\mathbb{R}^n$ ja osoita, että tämä on toiminta. Miten toimii ortogonaalisten matriisien ryhmä $O_n(\mathbb{R})$ avaruudessa $\mathbb{R}^n$.

3. G toimii omissa sivuluokissaan. Tarkemmin, olkoon $H \leq G$, ja olkoon $(G : H)$ oikeitten sivuluokkien joukko. Määrittelemme toiminnan

$$Hx * g = Hxg.$$

Osoita, että tämä on toiminta.

4. Olkoon D_{2n} diedriryhmä. Osoita, että tämä toimii säännöllisen n-kulmion symmetriaryhmänä.

Monet ryhmäteorian lauseet on helppo todistaa toimintojen avulla. Tässä yksi esimerkki klassisesta lauseesta.

Lause 5.6 (Cayley)**.** *Jokainen äärellinen ryhmä G, jonka kertaluku on pienempi tai yhtäsuuri kuin n, on ryhmän S_n aliryhmä.*

Todistus. Jos $k \leq n$, on $S_k \leq S_n$. Todistukseen riittää, että oletamme G:n kertaluvun olevan tasan n. Nyt meidän täytyy enää osoittaa, että ryhmä, jonka kertaluku on n on symmetrisen ryhmän S_n aliryhmä. Voimme määritellä G-toiminnan triviaalin aliryhmän $\{1\}$ sivuluokissa. Näitä sivuluokkia on luonnollisesti n kappaletta ja ne vastaavat G:n alkioita. Yllä olevan lemman perusteella toiminta määrittelee homomorfismin $\phi : G \to S_n$. Homomorfismin ytimeen kuuluvat sellaiset G:n alkiot, jotka kiinnittävät jokaisen sivuluokan. Näin ollen vain ykkösalkio kuuluu ytimeen ja kuvaus ϕ on injektio. Tästä seuraa ensimmäisen isomorfialauseen perusteella

$$G \cong G/\{1\} \cong G/Ker\phi \cong Im\phi \leq S_n.$$

□

Olkoon $H \leq G$. Jos G toimii joukossa Ω, myös H määrittää toiminnan joukossa Ω. Tämä aliryhmän toiminta hajottaa joskus Ω:n palasiksi. Kutsumme tätä toimintaa H-toiminnaksi.

Määritelmä 5.7. Olkoon G ryhmä, ja toimikoon se joukossa Ω. Olkoon $H \leq G$. Kun $\omega \in \Omega$, silloin ω:n rata H-toiminnassa on

$$orb_H(\omega) = \{\omega * g : g \in H\}$$

Propositio 5.8. *Kun G toimii joukossa Ω ja $H \leq G$, joukko Ω hajoaa H-ratojen pistevieraaksi unioniksi.*

Todistus. Tehtävä. Käytiin luennolla läpi. $\square$

Määritelmä 5.9. Kutsumme ryhmän G toimintaa joukossa Ω transitiiviseksi, jos jokaiselle $\omega_1, \omega_2 \in \Omega$, on olemassa $g \in G$ ja $\omega_1 * g = \omega_2$.

Jos jokaiselle parille pätee sama kuin yllä, kutsumme toimintaa 2-transitiiviseksi, ja edelleen n-transitiiviseksi.

Määritelmä 5.10. Toimikoon ryhmä G joukossa Ω, ja olkoon $\omega \in \Omega$. Alkion ω vakauttaja on joukko

$$G_\omega = \{g \in G : \omega * g = \omega\}.$$

Määritelmä 5.11. Ryhmän G toimintaa joukossa Ω kutsutaan uskolliseksi, jos ainoa alkio $g \in G$, jolle pätee $\omega * g = \omega$ kaikille $\omega \in \Omega$ on $g = 1$.

Tehtävä 30.

1. Osoita, että G_ω on G:n aliryhmä.
2. Olkoon $\omega = \alpha * g$, kun G toimii Ω:ssa. Osoita, että G_ω ja G_α ovat toistensa konjugaatteja.
3. Toimikoon G joukossa $\Omega = G$ konjugoimalla. Osoita, että alkion ω vakauttaja on alkion keskittäjä.
4. Osoita, että G:n toiminta oikeissa sivuluokissaan on transitiivinen, ja määrittele sivuluokkien H ja Hg vakauttajat.

Määritelmä 5.12. Toiminnan ydin on $G_{(\Omega)} = \cap_{\alpha \in \Omega} G_\alpha$.

Tehtävä 31. Osoita, että toiminta on uskollinen, jos toiminnan ydin on triviaali.

Yksi hyödyllisimmistä lausesta ryhmäteoriassa on rata-vakauttajalause.

Lause 5.13. *Olkoon G äärellinen ryhmä ja Ω äärellinen joukko. Kun G toimii Ω:ssa, jokaiselle $\alpha \in \Omega$, on voimassa*

$$|Orb_G(\alpha)| = |G : Stab_G(\alpha)|.$$

Määritellään ensin morfismi kahden toiminnan välillä.

Määritelmä 5.14. Kun ryhmä G toimii joukoissa Ω ja Δ kuvaus

$$\psi : \Omega \longrightarrow \Delta$$

on G-morfismi, jos

$$(\alpha *_\Omega g)\psi = \alpha\psi *_\Delta g,$$

kaikille $\alpha \in \Omega, g \in G$. Kuvausta ψ kutsutaan G-isomorfismiksi, jos se on bijektiivinen.

Tämän jälkeen rata-vakauttajalause seuraa seuraavasta lemmasta.

Lemma 5.15. *Jos G toimii transitiivisesti Ω:ssa ja $\omega \in \Omega$. Pisteen ω vakauttajaa merkitään G_ω. Silloin G:n toiminta Ω:ssa ja G:n toiminta G_ω:n sivuluokissa $(G : G_\omega)$ ovat isomorfisia.*

Todistus. Määritellään kuvaus $\psi : \Omega \longrightarrow (G : G_\omega)$ lähettämällä $\omega x \mapsto G_\omega x$. Tämä kuvaus on hyvinmääritelty ja injektiivinen, sillä

$$\omega x_1 = \omega x_2 \Leftrightarrow \omega x_1 x_2^{-1} = \omega \Leftrightarrow x_1 x_2^{-1} \in G_\omega \Leftrightarrow G_\omega x_1 = G_\omega x_2.$$

Kuvaus on myös selvästi surjektiivinen. Lopuksi tarkistetaan, että se on G-morfismi:

$$((\omega x) * g)\psi = (\omega * xg)\psi = G_\omega xg = (G_\omega x)g = (\omega x)\psi * g$$

kaikille pisteille $\omega x \in \Omega$. □

Todistetaan nyt rata-vakauttajalause.

Todistus. Olkoon $\alpha \in \Omega$, ja toimikoon G joukossa $Orb_G(\alpha)$. Tämä toiminta on luonnollisesti transitiivinen, sillä mikä tahansa radan alkio αg_1 voidaan kuvata mihin tahansa toiseen saman radan alkioon αg_2:n käyttämällä alkiota $g_1^{-1} g_2$. Nyt edellisen lemman perusteella G:n toiminnat radalla $Orb_G(\alpha)$ ja G_α:n sivuluokissa ovat isomorfiset, joten näiden kahden joukon välillä on bijektiivinen kuvaus. Tästä seuraa

$$|Orb(\alpha) = [G : G_\alpha].$$

□

Yksi sovellutus rata-vakauttajalauseelle on Cauchyn lause. Tämä voidaan nähdä eräänlaisena Lagrangen lauseen käänteistuloksena.

Lause 5.16 (Cauchyn lause)**.** *Jakakoon p ryhmän kertaluvun $|G|$. Tällöin G sisältää alkion, jonka kertaluku on p.*

Todistus. Määritellään $\Omega = \{(x_1, \ldots, x_p) : x_i \in G \text{ ja } x_1 x_2 \ldots x_p = 1\}$. Olkoon $H = \langle \sigma \rangle \cong C_p$, missä σ toimii Ω:ssa

$$\sigma : (x_1, \ldots, x_p) \to (x_2, \ldots, x_p, x_1).$$

Rata-vakauttajalause sanoo, että H-radan mahtavuus jakaa H:n kertaluvun. Niinpä saamme, että H-radan mahtavuus on joko 1 tai p. Lisäksi $|\Omega| = |G|^{p-1}$, koska voimme valita ensimmäiset $p-1$ alkiota vapaasti. Nyt p jakaa $|G|$:n, jakaa p myös $|\Omega|$:n. Siispä Ω on H-ratojen pistevieras unioni, ja kukin radoista on joko kokoa p tai 1. Huomaa, että $(1, 1, \ldots, 1)$ muodostaa oman ratansa, joten ainakin yksi rata on mahtavuutta yksi. Olkoon kokoa yksi olevien ratojen määrä a ja kokoa p olevien ratojen lukumäärä b. Silloin $|\Omega| = a \cdot 1 + b \cdot p$. Koska p jakaa $|\Omega|$:n, jakaa p myös a:n. Niinpä on olemassa ainakin p rataa, joiden koko on 1. Jotta α:n rata olisi kokoa 1, täytyy olla niin, että $x_1 = x_2 = \cdots = x_p \neq 1$. Mutta $x_1 x_2 \cdots x_p = 1$, joten $x_1^p = 1$ ja olemme löytäneet alkion, jonka kertaluku on p. □

Määritelmä 5.17. Ryhmän G keskus on joukko

$$\{g \in G : gh = hg \ \forall h \in G\}.$$

Tästä huomaamme heti, että ykkösalkio kuuluu ryhmän keskukseen. Toisinaan ryhmän keskus on kuitenkin ykkösalkiota suurempi.

Tehtävä 32. (i) Osoita, että keskus on normaali aliryhmä.

(ii) Imitoimalla ylläolevaa todistusta, osoita, että p-ryhmän keskus on epätriviaali (suurempi kuin ykkösalkio). Tässä tarvittava toiminta on konjugaatiotoiminta.

Rata-vakauttajalauseen avulla pystymme nyt tutkimaan Platonin kappaleiden symmetriaryhmiä tarkemmin.

5.1 Ryhmä S_4

Tutkimme ryhmää S_4. Tämä on neljän alkion joukon permutaatioryhmä. Neljä alkiota voidaan permutoida yhteensä $4! = 24$ eri tavalla. Niinpä joukossa S_4 on yhteensä 24 alkiota. Symmetriselle ryhmälle on olemassa erityinen tapa merkitä alkioita, eli syklinotaatio, jossa alkiot esitetään erillisten syklien tulona.

Esimerkki 5.18. Permutaatiot

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

voidaan syklinotaatiossa kirjoittaa muotoon (13)(24) ja (134).

Kutsumme sykliä, jonka pituus on kaksi, transpositioksi. Voimme hajottaa jokaisen n:n pituisen syklin aina transpositioiden (ei välttämättä erillisten) tuloksi. Jos transpositiohajotelmassa on parillinen määrä termejä, kutsumme permutaatiota parilliseksi, muussa tapauksessa parittomaksi. Molemmat ylläolevat permutaatiot ovat parillisia, sillä $(134) = (13)(34)$.

Määritelmä 5.19. Symmetrisen ryhmän alkion syklityyppi määräytyy sen alkiovieraan syklihajotelman perusteella. Syklityyppi listaa yksinkertaisesti eripituisten syklien määrät.

Esimerkki 5.20. Alkion (14) syklityyppi on 2, kun taas alkion (125)(346)(78)(9) syklityyppi on $3^2, 2, 1$, huomaa, että 3+3+2+1=9. Monesti ykkössyklejä ei kirjoiteta ollenkaan.

Lause 5.21. *Kaksi symmetrisen ryhmän S_n alkiota ovat toistensa konjugaatteja, jos ja vain jos niillä on sama syklityyppi.*

Todistus. Olkoon $(a_1 \dots a_m)$ m-sykli ja $\rho \in S_n$, silloin $\rho^{-1}(a_1 \dots a_m)\rho = (a_1\rho \dots a_m\rho)$ (vakuutu tästä esimerkkien avulla).

Olkoon nyt $\tau = \tau_1\tau_2 \dots \tau_r$ syklihajotelma. Silloin

$$\rho^{-1}\tau\rho = \rho^{-1}\tau_1 \dots \tau_r\rho = \rho^{-1}\tau_1\rho\rho^{-1}\tau_2\rho \dots \rho^{-1}\tau_r\rho,$$

missä jokainen $\rho^{-1}\tau_i\rho$ on sykli, jonka pituus on sama kuin τ_i:n pituus. Niinpä $\rho^{-1}\tau\rho^{-1}$:lla ja τ:lla on sama syklityyppi.

Jos taas τ:lla ja σ:lla on sama syklityyppi, meidän täytyy konstruoida ρ, joka konjugoi nämä alkiot keskenään. Kirjoitetaan τ ja σ sellaiseen järjestykseen, että samanpituiset syklit ovat samassa järjestyksessä.

$$\begin{aligned} \sigma &= (a_1 \dots a_m)(a_{m+1} \dots a_r)(a_{r+1} \dots)() \\ \tau &= (b_1 \dots b_m)(b_{m+1} \dots b_r)(b_{r+1} \dots)() \end{aligned}$$

Nyt luomme alkion ρ kuvaamaan $a_i \mapsto b_i$ mukaan lukien ykkössyklit. Tällainen ρ permutoi $\{1, \dots, n\}$ ja on siis ryhmän S_n alkio, kuten vaadittua. $\square$

Tehtävä 33. Osoita, että ryhmän S_n parilliset permutaatiot muodostavat normaalin aliryhmän A_n, jota kutsutaan alternoivaksi ryhmäksi. [2] Osoita, että tasan puolet S_n:n alkioista on parillisia, ja päättele, että A_n:n indeksi on kaksi.

Huomautus 5.22. Syklityyppi ei määritä konjugaatiota alternoivassa ryhmässä. Joskus S_n:n konjugaatioluokat, voivat hajota, kun konjugoimme niitä ryhmässä A_n.

[2] Minun mielestäni parempi termi olisi kutsua sitä vuorottelevaksi ryhmäksi. Tai vuorotteluryhmäksi.

Tehtävä 34. Etsi alkion (123) konjugaatit ryhmässä A_4.

Kokoamme taulukkoon S_4:n alkiot konjugaatioluokkien mukaan

Taulukko 6: Ryhmän S_4 alkiot

Konjugaatioluokka	1	2	3	4	5
edustaja	1	(12)	(12)(34)	(123)	(1234)
alkion kertaluku	1	2	2	3	4
konjugaattien määrä	1	6	3	8	6
keskittäjän koko	24	4	8	3	4

Koska syklityyppi määrittää konjugaatioluokan, on luonnollista, että normaalit aliryhmät ovat konjugaatioluokkien yhdisteitä. S_4:ssä on kaksi normaalia aliryhmää. V_4 on konjuvaatioluokkien 1 ja 3 yhdiste ja alternoiva ryhmä A_4 on konjugaatioluokkien 1,3 ja 4 yhdiste.

Kokoamme myös ryhmän A_4 vastaavat tiedot taulukkoon.

Taulukko 7: Ryhmän A_4 alkiot

Konjugaatioluokka	1	2	3a	3b
edustaja	1	(12)(34)	(123)	(134)
alkion kertaluku	1	2	3	3
konjugaattien määrä	1	3	4	4
keskittäjän koko	12	4	3	3

5.2 Platonin kappaleiden symmetriaryhmät

Lause 5.23. *Kuution kiertosymmetriaryhmä on S_4.*

Todistus. Etsimme siis ryhmää

$$G = \{g \in SO(3) : g : \Omega \longrightarrow \Omega\},$$

missä

$$\Omega = \{(a, b, c) : a, b, c \in \{1, -1\}\}.$$

Jaamme todistuksen kolmeen eri osaan.

1. Aloitamme tarkastelemalla symmetriaryhmän kokoa. Koska symmetriaryhmä toimii transitiivisesti kuution kärjissä, ja jokaisen kärjen vakauttaa kolme alkiota, saamme rata-vakauttajalauseen perusteella ryhmän kooksi 24. Kärjen vakauttavat täsmälleen ne kierrot, joitten symmetria-akseli menee kärjen läpi, ja diagonaalisesti toiseen kärkeen. Tämän akselin ympäri voimme kiertää kuutiota joko $2\pi/3$ tai $4\pi/3$:n verran säilyttäen kuution symmetrian.

2. Toiseksi todistamme, että on olemassa homomorfismi $\phi : G \longrightarrow S_4$. Merkitään S:llä kuution päädiagonaalien joukkoa

$$S := \{(AA'), (BB'), (CC'), (DD')\}.$$

Mikä tahansa kuution symmetriaryhmään kuuluva $g \in G$ permutoi näitä neljää diagonaalia. Joten G indusoi toiminnan joukossa S joka tuottaa homomorfismin $\phi : G \longrightarrow S_4$. Ensimmäisen isomorfialauseen perusteella $Im\phi \cong G/Ker\phi$.

3. Viimeksi todistamme, että $Ker\phi = 1$, sillä silloin homomorfismi on injektio, ja koska $|G| = |S_4|$, tästä seuraa, että se on isomorfismi.

Olkoon $g \in Ker\phi$. Tämä tarkoittaa sitä, että g toimii triviaalisti joukossa S, esimerkiksi se kuvaa $\{A, A'\} \longrightarrow \{A, A'\}$. Oletamme, että $g \neq 1$ ja menettämättä mitään, voimme tarkemmin olettaa, että g kuvaa A:n A':ksi. Nyt tarkastelemme B:tä. B on kärki, joka on yhden särmän päässä A:sta, joten g:n pitää kuvata B johonkin sellaiseen kärkeen, joka yhdistyy särmällä A':n. Muistamme, että $g : \{B, B'\} \longrightarrow \{B, B'\}$, joten g kuvaa B:n B':ksi. Samalla tavalla g kuvaa C:n C':ksi ja D:n D':ksi.

Nyt muistamme, että $g \in SO(3)$, jonka alkioita voidaan ajatella myös 3×3-matriiseina. Sellainen 1-dimensioinen $\mathbb{R}^3$:n aliavaruus, joka sisältää pisteet A ja A' on jonkun g:n ominaisvektorin virittämä. Lisäksi tämän ominaisvektorin ominaisarvo on -1. Sama on totta tietysti B, B', C, C' ja D, D':lle. Kaikenkaikkiaan siis g:llä on kolme lineaarisesti riippumatonta ominaisvektoria, joiden kaikkien ominaisarvo on -1. Tämä tarkoittaa sitä, että g:n determinantti on -1, mikä on tietysti ristiriita, sillä $SO(3)$:n alkioiden determinanttien pitää olla 1. Kuvaus on siis injektio, kuten haluttua.

$\square$

Korollaari 5.24. *Oktaedrin kiertosymmetriaryhmä on S_4.*

Todistus seuraa siitä, että oktaedri on kuution duaalikappale. Eli voimme käyttää ylläolevaa todistusta suoraan, mutta nyt tarkastelemme kunkin sivutahkon vakauttajaa, kun symmetria-akseli menee sivutahkokolmion keskipisteen lävitse.

Lause 5.25. *Tetraedrin kiertosymmetriaryhmä on A_4.*

Todistus. Tetraedrillä on neljä kärkeä, ja tetraedrin symmetriaryhmän tulee toimia transitiivisesta näissä kärjissä. Kunkin kärjen vakauttaja on kierto, jonka akseli menee yhdestä kärjestä vastakkaisen sivutahkon keskelle. Tähän ryhmään kuuluu kolme alkiota, joten rata-vakauttajalauseen nojalla ryhmän koko on 12. Tämä on ryhmän A_4 koko. Nyt tehtäväksi jää todistaa, että tetraedrin symmetriaryhmä on isomorfinen ryhmän A_4 kanssa. □

Ryhmän A_5 rakenteen selvitämme seuraavassa luvussa tarkemmin. Tässä vain toteamme seuraavat lauseet.

Lause 5.26. *Dodekaedrin kiertosymmetriaryhmä on A_5.*

Korollaari 5.27. *Ikosaedrin kiertosymmetriaryhmä on A_5.*

Todistus. Lasketaan symmetriaryhmän koko rata-vakauttajalauseen perusteella. Dodekaedrissä on 12 tahkoa ja kunkin tahkon vakauttaja on viitossykli, jonka akseli menee tahkon viisikulmion kärjen läpi. Näin ollen symmetriaryhmän koko on $5 \times 12 = 60$. □

Palaamme nyt toimintojen teoreettisempaan puoleen, jotta voimme esittää mainion ja hyödyllisen lauseen, jota myös ei-Burnsiden lauseeksi kutsutaan. Lauseen nimi kaivannee hieman selittämistä. Noin 1960-luvulta lähtien monet matemaatikot ovat kutsuneet lausetta Burnsiden lauseeksi, ja se kyllä esiintyy William Burnsiden ryhmäteorian opuksessa vuodelta 1897, joten Burnside kyllä tunsi lauseen, kuten myös muut hänen aikalaisensa. Lause itse on vanhempi ja esiintyy ainakin Cauchyn paperissa 1845 ja nykymuodossa Frobeniuksen paperissa 1887 (luultavasti karakteeriateorian yhteydessä). Tavallaan on reilua kutsua lausetta ei-Burnsiden lauseeksi, sillä lähes kaikki muut tuon ajan ryhmäteorian lauseista olivat Burnsiden käsialaa.

Määritelmä 5.28. Ryhmä G toimii joukossa Ω. Alkion g kiinnittämien alkioitten joukko on

$$\chi(g) = \{\omega \in \Omega : \omega * g = \omega\}.^3$$

[3] Merkitsemme tätä joukkoa kreikkalaisella kirjaimella χ, koska tällä joukolla on yhteys karakteeriteoriaan, josta ehkä jollain myöhemmällä kurssilla.

Huomautus 5.29. Tämä ei ole sama joukko kuin alkion vakauttaja

$$Stab_G(\omega) = G_\omega = \{g \in G : \omega * g = \omega\}.$$

Erityisesti, $\chi(g)$ on Ω:n osajoukko, eikä G:n aliryhmä.

Lause 5.30 (ei-Burnsiden lause)**.** *Toimikoon G joukossa Ω. Silloin G:n ratojen lukumäärä Ω:ssa on*

$$\frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}|\chi(g)|.$$

Todistus. Olkoon S järjestettyjen parien joukko $\{(\omega, g) : g \in G, \omega \in \Omega, \omega * g = \omega\}$. Lasketaan joukon S mahtavuus kahdella eri tavalla. Ensiksi lasketaan tämä G:n alkioiden mukaan. Näin saamme täsmälleen $\sum_{g\in G}|\chi(g)|$. Lasketaan joukko nyt Ω:n alkioiden mukaan. Ω hajoaa G-radoiksi Ω_1, Ω_2,...Ω_k. Voimme edelleen laskea jokaisen Ω_i alkiot erikseen.

Olkoon $\omega \in \Omega_i$, jotta pari $(\omega, g) \in S$ vaaditaan, että $\omega * g = \omega$, toisin sanoen sopivien alkioiden g lukumäärä on täsmälleen $|Stab_G(\omega)|$. Ratavakauttajalauseen perusteella $|G| = |\Omega_i||Stab_G(\omega)|$. Tästä seuraa $|S| = |G| \times$ ratojen luku. $\square$

5.3 Platonin kappaleiden väritysongelmat

Ei-Burnsiden lause on hyödyllinen erilaisissa kombinatorisissa laskutehtävissä. Esimerkiksi, voimme kysyä, kuinka monta erilaista tapaa on värittää tetraedri kolmella eri värillä. Määrittelemme kaksi tetraedrin väritystä samaksi, jos on olemassa kiertosymmetria, jonka avulla väritykset näyttävät samalta.

Koska värejä on kolme, vaikkapa sininen, valkoinen ja punainen, voidaan jokainen tahko värittää 3 tavalla ja koska tahkoja on neljä, on värityksiä yhteensä $3^4 = 81$. Nyt tutkimme, mitkä väritykset näistä ovat samoja, eli näyttävät samalta kiertosymmetrian suhteen. Olkoon Ω näiden 81 eri tavalla väritetyn tetraedrin joukko, jonka alkiot ovat siis $T_1, T_2, \ldots, T_{81}$. G on tetraedrin kiertosymmetrioiden ryhmä, joka on siis A_4. G toimii Ω:ssa luonnollisella tavalla, eli kuvaa jokaisen $T_1, \ldots, T_{81}$ joksikin toiseksi tetraedriksi $T_1, \ldots, T_{81}$. Kaksi tetraedria S ja T ovat värityksen suhteen sama tetraedri, jos on olemassa $g \in G$, joka $S * g = T$. Tästä seuraa, että tetraedrin väritykset voidaan laskea laskemalla kuinka monta G-rataa on joukossa Ω. Nimittäin jokaiseen rataan on kerätty täsmälleen sellaiset tetraedrit, jotka ovat väritykseltään samat.

Voimme käyttää ratojen lukumäärän laskemiseen ei-Burnsiden lausetta. Jotta voimme soveltaa sitä, on tarkasteltava kunkin G:n alkion kiinnittämää joukkoa.

1. Ykkösalkio kiinnittää kaiken, eli $\chi(1) = 81$.
2. Kolmossyklin θ akseli on tetraedrin yksi kärki ja siitä suora vastakkaisen tahkon keskipisteeseen. θ kiinnittää värityksen, jos sivutahkot ovat kaikki samanvärisiä. Tällaisia värityksiä on yhteensä 9, koska on kolme väriä, joilla voimme värittää sivutahkot samanvärisiksi. Pohja voi olla tämän lisäksi minkä värinen tahansa.
3. Alkio ϕ, jonka kertaluku on kaksi, toimii kuten (12)(34) tahkojen suhteen. Joten, jos halutaan sen kiinnittävän värityksen, vaadimme, että tahkot 1 ja 2 ovat samaa väriä, kuten myös tahkot 3 ja 4. Erilaisia värityksiä saamme jälleen 9.

Ryhmässä A_4 on yhteensä kahdeksan kolmossykliä, ja kaikille näille $\chi(\theta) = 9$. Kertalukua kaksi olevia alkioita on yhteensä kolme, ja kaikille näille $\chi(\phi) = 9$. Nyt ei-Burnsiden lause sanoo, että värityksiä on

$$\frac{1}{|A_4|} \sum_{g \in A_4} |\chi(g)| = \frac{1}{12}(81 + 8 \cdot 9 + 3 \cdot 9) = 15.$$

Tehtävä 35. 1. Kuinka monta eri tapaa on värittää kuutio keltaisella ja sinisellä?

2. Kuinka monta eri tapaa on luoda helminauha, jonka pituus on 14 helmeä, käyttämällä hopeisia, kultaisia sekä norsunluisia helmiä?
3. Osoita, että on 9099 tapaa värittää dodekaedri kolmella värillä.