8 Vapaa ryhmä

Kolmosluvussa määrittelimme vapaan Abelin ryhmän. Se oli vapaa Abelin ryhmien kategoriassa. Edellisessä luvussa tutustuimme ratkeavien ryhmien kategoriaan. Nyt määrittelemme vapaan ryhmän kaikkien ryhmien kategoriassa.

Intuitiivisesti, vapaa ryhmä on se ryhmä, josta on mahdollista tuottaa kaikki ryhmät. Samaan tapaan kuin kaikki äärelliset ryhmät ovat symmetrisen ryhmän aliryhmiä, ovat kaikki ryhmät vapaan ryhmän tekijäryhmia. Tarkastelemalla ryhmiä vapaan ryhmän tekijäryhminä, saamme myös uuden tavan esittää ryhmiä, johon olemme pari kertaa jo tällä kurssilla törmänneet.. Jo ryhmäteorian alkeissa huomataan, ettei ryhmän kertolaskutaulukko (Cayleyn taulukko) ole kaikkein kätevin tapa hahmottaa ryhmää, sillä se kasvaa tavattoman suureksi tavattoman nopeasti, jo kahdeksan alkion ryhmässä oli työlästä laatia Cayleyn taulukko. Tämän kappaleen tärkeintä materiaalia on ryhmän esittäminen virittäjien ja suhteiden avulla. Tähän olemme jo hieman viitanneet aikaisemminkin.

Vapaan ryhmän määritelmä on kategoriateoreettinen.

Määritelmä 8.1. Olkoon $X = \{X_i\}_{i \in I}$ joukko. Vapaa ryhmä joukolle X koostuu ryhmästä $F = F_X$ ja kuvauksesta $i\colon X \longrightarrow F$, jolle pätee kaikille ryhmille G ja kuvauksille $j\colon X \longrightarrow G$ on olemassa yksikäsitteinen homomorfismi $\rho\colon F \longrightarrow G$, joka kommutoi $\rho \circ i = j$.

Kategoriateoreettisen hölynpölyn avulla on selvää, että tämä ryhmä on olemassa, mutta sen konstruointi ei ollut täysin yksinkertaista.

Käsittelemme nyt algebrallista konstruktiota. Olkoon X symmetrinen aakkosto. Symmetrinen tarkoittaa sitä, että jos $x \in X$ on myös $x^{-1} \in X$. Aakkoston voi yleisemmin ymmärtää virittäjäjoukoksi.

Esimerkiksi, olkoon $X = \{a, b\}$, ja olkoon e tyhjä sana. Aakkostosta voidaan muodostaa sanoja a, b, ab, ba, $aaabbbaaabababababaa$. Jos ymmärretään aakkoset ryhmän virittäjinä, on kukin sana tietysti ryhmän alkio. Muistamme kuitenkin, että virittäjät oli saatettu valita niin, että $a^2 = 1$, jolloin sana $aaabbbaaabababababaa = abbbabababab$, joten kaksi eri sanaa esittävät ryhmän alkiota. Määrittelemme seuraavaksi vapaan tulon ja supistetut sanat, jotta saamme vapaan ryhmän konstruoitua.

Olkoot v ja w kaksi sanaa aakkostossa X. Silloin vw on sana, jossa v ja w on kirjoitettu yhdeksi sanaksi. Jos sana v päättyy kirjaimeen x ja sana w alkaa kirjaimella x^{-1}, supistetaan nämä kirjaimet. Kun kaikki mahdolliset supistukset on tehty, saadaan supistettu sana.

Propositio 8.2. *Olkoon X aakkosto. Supistetut sanat muodostavat vapaan* *ryhmän aakkostossa (virittäjistössä) X. Ryhmän kertolaskuna on sanojen kirjoittaminen vierekkäin.*

Todistus. On selvää, että tämä operaatio muodostaa ryhmän. Tarkistamme, että ryhmä on vapaa. □

8.1 Ryhmän esitys virittäjien ja suhteitten avulla

Lause 8.3. *Jokainen ryhmä on vapaan ryhmän tekijäryhmä.*

Todistus. Todistamme äärellisesti viritetyn tapauksen. Vapaan ryhmän määritelmän mukaan jokainen virittäjäkuvaus $\phi : X \longrightarrow A$ laajenee ryhmähomomorfismiksi $\phi : F \longrightarrow G$. Tämä ryhmähomomorfismi on surjektiivinen vapaan ryhmän universaaliominaisuuden perusteella. Niinpä ensimmäisen isomorfialauseen perusteella $G \cong F/Ker\phi$. □

Huomaa, että $Ker\phi$ koostuu niistä sanoista ryhmässä F, jotka ovat triviaaleja sanoja ryhmässä G. Näitä triviaalia sanoja kutsutaan suhteiksi.

Esimerkki 8.4. Tässä joitain tuttujen ryhmien esityksiä. Mitkä näiden ryhmien nimet ovat?

1. $\langle a : a^n = 1 \rangle$
2. $\langle a, b : a^2 = b^2 = 1, ab = ba \rangle$
3. $\langle a, t : a^4 = t^2 = 1, tat = a^{-1} \rangle$.
4. $\langle s_1, s_2, s_3 : s_i^2 = 1, (s_1s_2)^3 = (s_2s_3)^5 = (s_1s_3)^2 = 1 \rangle$
5. $\langle a, b, c : a^{-1}ba = b^2, b^{-1}cb = c^2, c^{-1}ac = a^2 \rangle$

Tehtävä 57.

Mikä ryhmä saadaan, kun virittäjinä ovat kaikki suomen kielen luonnolliset aakkoset, $a, b, c, \ldots, ,$ ja relaatioina kaikki suomenkieliset sanat. Eli $auto = 1, talo = 1$ jne? Muuttuuko tulos, jos sallimme taivutusmuodot? Entä, jos otamme pois vierasperäiset kirjaimet?

Olkoon ryhmän virittäjät nyt aakkoset $a, b, c, \ldots, x, y, z$, eli englannin aakkosto. Mikä ryhmä saadaan, kun suhteina ovat kaikki homonyymit, eli sanat, jotka kirjoitetaan eri tavalla, mutta lausutaan samalla tavalla. Esim. $pear = pair$ ja $hear = here$.

Tehtävä 58. Ovatko seuraavat ryhmät isomorfiset?

$$\langle a, b : a^2 = b^3 = 1, (ab)^2 = 1, (ab^2)^2 = 1 \rangle$$

ja

$$\langle a, b, c : a^2 = b^2 = c^2 = 1, ab = bc, acbc = 1 \rangle.$$

Tehtävä 59. Olkoon $\langle k, l, m : k^3 = l^4 = m^8 = 1, mkl = lk, m^3k^2 = l^3, \rangle$ supista sanaa $mklk^2l^5mkmk$ niin paljon kuin mahdolista. Onko tämä sana ykkösalkio?

Yksi ryhmän esitysten ongelma on, että niiden perusteella on hyvin hankala sanoa, onko joku tietty sana yksikköalkio. Itseasiassa, tämä ongelma on päättämätön (undecidable). Kuten myös se, milloin kaksi ryhmää ovat isomorfisia tai kaksi alkiota ovat toistensa konjugaatteja. Nämä ongelmat tunnetaan nimillä sanaongelma, isomorfismiongelma ja konjugaatio-ongelma. Yleistä ratkaisua näille ongelmille ei ole, mutta niitä voidaan tutkia tietyissa ryhmätyypeissa, ja joissain ne voidaan päättää. Sanaongelma on ratkeava esimerkiksi hyperbolisissa ryhmissä ja peilausryhmissä. (Rips, Sela, Tits. Tits on viime vuoden Abelin palkinnon voittaja)

Sanaongelmia voidaan hahmottaa Cayleyn verkon ja sen geometristen ominaisuuksien avulla. (Itseasiassa hyperbolisen ryhmän määritelmässä käytetään Cayleyn verkkoa.)

Oletetaan, että ryhmällä G on äärellinen virittäjäjoukko $X \bigcup X^{-1}$. Cayleyn verkon solmut ovat ryhmän G alkiot. Solmut a ja b yhdistetään, jos on olemassa sellainen $x \in X$, että $ax = b$. Joten jokainen ryhmän kaari vastaa siis virittäjäjoukon alkiota.

Esimerkki 8.5. Tarkastelemme ryhmän kahden alkion virittämän vapaan ryhmän Cayleyn verkkoa. Olkoot x ja y ryhmän F_2 virittäjät. Koska haluamme tarkastella symmetristä virittäjäjoukkoa, virittäjät ovat x, x^{-1}, y, y^{-1}. Aloitamme konstruoinnin ykkösalkiosta. Ykkösalkiosta lähtee yhteensä neljä kaarta, alkioihin x, x^{-1}, y, y^{-1}. Alkiosta x lähtee kaari takaisin ykkösalkioon, ja tämän lisäksi alkioihin x^2, xy, xy^{-1}. Kukin verkon solmu on siis redusoitu sana aakkostossa x, y, kuten pitääkin. Lisäksi huomaamme, että verkossa ei ole syklejä, sillä sykli vastaa suhdetta, ja vapaassa ryhmässä ei ole suhteita. Cayleyn verkko on siis yksinkertaisesti ääretön 4-valentti puu.

Tehtävä 60. Mikä on $\mathbb{Z}$:n Cayleyn verkko? Minkälainen on $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$:n Cayleyn verkko? Piirrä Cayleyn verkko ryhmälle S_3, kun sen virittäjät ovat $(12), (13), (23)$. Piirrä vastaava verkko virittäjille $(12), (123)$. Miten virittäjien valinta vaikuttaa verkkoon?

Verkon ominaisuuksien perusteella voimme määritellä ryhmien ominaisuuksia. Esimerkiksi hyperboliset ryhmät viittaavat ryhmiin, joiden verkko muistuttaa hyperbolista avaruutta. Tämä verkko ei riipu virittäjäjoukon valinnasta.

Cayleyn verkolle voidaan helposti antaa luonnollinen metriikka toteamalla, etta jokaisen sivun pituus on yksi, tätä metriikaa kutsutaan sanametriikaksi. Avoin pallo, jonka säde on ℓ on origosta lähtien kaikkien niiden sanojen joukko, joiden pituus on korkeintaan ℓ. Jos määrittelemme kunkin verkon kaaren pituudeksi 1, saamme geometrisen merkityksen tälle määritelmälle.

Sanojen kasvulla puolestaan tarkoitetaan sitä, kuinka monta ryhmän alkiota voidaan esittää korkeintaan n:n pituisena sanana. Geometrisesti ajatellen tämä tarkoittaa sitä, miten monta alkiota sisältyy n-pallon sisälle tässä metriikassa. Joskus tämä pallo kasvaa lineaarisesti, joskus polynomisesti, joskus eksponenttisesti. On myös joitain ryhmiä, joille kasvu on alieksponenttinen. Nämä ryhmät ovat oksaryhmiä, jotka voidaan määritellä tiettyjen puiden automorfismiryhminä.