2 Alkusanat

Ryhmäteoria voidaan tiivistää sanomalla, että se on symmetrioiden matemaattista tutkimista. Tällä ei tarkoiteta yksinomaan kadunmiehen käsitystä siitä, että joku esine on symmetrinen, jos sille voidaan piirtää symmetria-akseli niin, että kumpikin puoli näyttää toistensa peilikuvilta, kuten nyt esimerkiksi musteläikkätestin kuvat. Peilisymmetria on tietysti yksi symmetrian laji, mutta ei ainoa symmetriatyyppi. Esimerkiksi lumihiutale on symmetrinen. On totta, etta siinä on kuusi symmetria-akselia, joiden ympäri lumihiutale voidaan peilata itselleen, mutta koska lumihiutale on täydellinen säännöllinen kuusikulmio, on sillä myös kiertosymmetrioita, itseasiassa yhteensä kuusi kappaletta. Kuusi? Miten niin kuusi? Sitä voidaan kiertää $n \times \pi/3$ radiaania, $n = 1, \ldots 5, 6$, mutta $6\pi/3 = 2\pi$ eikä se oikeastaan ole kierto. Sovimme kuitenkin, että tämä on neutraalikierto, ja ekvivalentti sen kanssa, etta lumihiutale nostetaan tasosta (ja toivotaan ettei se sula tässä käsittelyssä) ja lasketaan tasolle samaan asentoon. Oikeastaan ryhmäteoria ei itsessään ole symmetrioita, vaan se kuvaa symmetrisiä toimintoja. Musteläikän tapauksessa, se kuvasi peilaustoimintaa. Ja lumihiutaleen tapauksessa nostoja ja kiertoja peilausten lisäksi. Ryhmäteoriassa ryhmä itse ja sen toiminnat – yllä olevassa tapauksessa kaksiuloitteisessa avaruudessa – ovat erottamattomasti yhteydessä toisiinsa. Kahdessa ulottuvuudessa ja toisinaan kolmessakin, pystymme vielä näkemään, ellemme itse ryhmää, ainakin sen toiminnat, esimerkiksi lineaarikuvaukset tasolla. Kun ulottuvuuksia on enemmän kuin kolme, on syytä turvautua algebralliseen merkintätapaan, sillä ihmismieli ei pysty enää hahmottamaan näitä symmetrioita geometrisesti. Symmetrioita on siis näkyviä että abstrakteja näkymättömiä. Vaikka ryhmäteoria tuntuisikin kuivalta algebralta, joka seuraa neljästä tylsästä aksioomasta, se ei ole sitä. Jotenkin ryhmäteoria on samantyyppinen kuin esimerkiksi elliptiset käyrät. Jostain syystä genus ykkösen käyrillä on tavattoman rikas teoria, jota ei ole muun genuksen käyrillä. Samaan tapaan myös monistot kolmessa ulottuvuudessa ovat valtavan paljon mielenkiintoisempia kuin monistot kahdessa, tai neljää korkeammissa ulottuvuuksissa. Ryhmillä on siis tarpeeksi rakennetta olla mielenkiintoisia tavalla, jota yhtäältä esimerkiksi puoliryhmät (joukko, jossa on liitännäinen operaatio) tai monoidi (joukko, jossa on liitännäinen operaatio sekä ykkösalkio) eivät ole. Yksinkertaisesti liian vähät aksioomat tuottavat tylsyyttä. Toisaalta kuntien teoria on hyvin paljon paremmin ymmärretty kuin ryhmien. Kunnan määritelmässä on enemmän aksioomia ja ne tuottavat rajoitetumpia rakenteita – vaikka on kunnissa myös hyvin villejä lukuteoreetikkojen tuottamia esimerkkejä. Toisaalta nämä villit kunnat tuottavat myös villejä ryhmiä, joten ehkä ryhmäteoreetikot olivat tässäkin yhteydessä asialla ensin. Tämä yhteys tulee tietysti Galois'n teorian kautta.

Tällä kurssilla saatamme päästä Galois'n teorian kautta tutkimaan proäärellisiä ryhmiä, jos osanottajat hallitsevat Galois'n teorian perusteet, mutta kuten jokaisella ryhmäteorian peruskurssilla, aloitamme pienistä äärellisistä ryhmistä ja erityisesti tutustumme esimerkkeihin, jotka ovat epäkommutatiivisia. Kun ryhmän kertaluku on pieni, seuraa näistä neljästä aksioomasta jo sangen helppo luokittelu ryhmille. Tutkimme tarkemmin kertalukua kuusi ja kahdeksan olevia ryhmiä. Toisinaan myös pelkkä kertaluku rajoittaa ryhmän rakennetta radikaalisti. Todistamme esimerkiksi, että pelkästään Sylowin lauseesta seuraa, että voi olla olemassa vain kaksi yksinkertaista (epäkommutatiivista) äärellistä ryhmää, joiden kertaluku on alle kolmesataa. Tavallaan ryhmäteorian hienous on siinä, että olioita voidaan luokitella.

Ryhmäteoria on edelleen hyvin aktiivinen matematiikan tutkimuksen ala, joka edelleen jakautuu useisiin alahaaroihin. Tällä kurssilla tutustumme muutamiin hyvin tuoreisiinkin tuloksiin (emme kuitenkaan yleisesti ottaen niiden todistuksiin, sillä kuten on lukuteorian tapauksessa, jotkut ryhmäteoreettiset lauseet on helppo esittää, mutta erittäin hankala todistaa). Opetuksen periaate ei ole kuivan teorian laajentaminen, vaan yritän tehdä ryhmäteoriaa eläväksi matematiikan alaksi. Sitä varten olen valinnut noin kymmenen suosikkiryhmääni. Ne ovat sangen konkreettisia esimerkkejä, joiden kautta voimme oppia teoriaa ja ymmärtää, miksi jokin teoreettinen määritelmä on hyödyllinen tai järkevä. Esimerkit on valittu hyvin erilaisilta matematiikan ja ryhmäteorian aloilta, jotta saamme hieman makua siitä, miten monipuolista ryhmäteoria on. Tarkastelemme myös ryhmäteorian yhteyksiä eri puolille puhdasta matematiikkaa.

Vaikka aloitamme äärellisistä ryhmistä, on hyvä pitää mielessä että äärelliset ryhmätkin voivat olla todella suuria. Jopa yksinkertaiset ryhmät, joita voidaan pitää kaikkien äärellisten ryhmien rakennuspalikoina, voivat olla valtavia. Suurin nk. sporadinen ryhmä tässä luokittelussa, jota myös Hirviöksi kutsutaan, on kertalukua $808017424794512875886459904961710757005754368000000000 = 2^{46}\cdot 3^{20}\cdot 5^{9}\cdot 7^{6}\cdot 11^{2}\cdot 13^{3}\cdot 17\cdot 19\cdot 23\cdot 29\cdot 31\cdot 41\cdot 47\cdot 59\cdot 71$, mikä tarkoittaa ryhmän alkioiden määrää.

Yksinkertaiset ryhmät määrittelemme myöhemmin tällä kurssilla. Hirviön tarkempi määritelmä vaatisi kokonaisen kurssin. Palatkaamme siis alkeisiin.