Lineaarialgebra ja matriisilaskenta II, kurssikoe 16.12.2009: Ratkaisut ja arvostelukommentit (Jouni Luukkainen), 3 s. *Tämä tiedote on myös kurssin kotisivulla.*

1. Olkoon $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$.

(a) Määritä A:n riviavaruus ja sen dimensio.

(b) Määritä A:n sarakeavaruus ja sen dimensio.

(a) Määritä A:n nolla-avaruus ja sen dimensio.

Ratk. **(a)** Matriisin A riviavaruus $\mathrm{row}(A)$ on A:n rivivektoreiden $[\,1 \quad 0 \quad 0\,]$ ja $[\,0 \quad 1 \quad 0\,]$ virittämä avaruuden $\mathbb{R}^{1\times 3} \cong \mathbb{R}^3$ aliavaruus. Koska matriisi A on (jopa pelkistetyssä) porrasmuodossa ilman nollarivejä, muodostavat sen rivivektorit riviavaruuden kannan. Tämä nähdään myös suoraan. Siis

$$\mathrm{row}(A) = \underline{\mathrm{span}\{[\,1 \quad 0 \quad 0\,], [\,0 \quad 1 \quad 0\,]\} = \{[\,x \quad y \quad 0\,] \in \mathbb{R}^3 \mid x, y \in \mathbb{R}\}},$$

ja $\dim(\mathrm{row}(A)) = 2$.

(b) Matriisin A sarakeavaruus $\mathrm{col}(A)$ on A:n sarakevektoreiden $[\,1 \quad 0\,]^T$, $[\,0 \quad 1\,]^T$ ja $[\,0 \quad 0\,]^T$ virittämä avaruuden $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R}^{2\times 1}$ aliavaruus. Koska matriisi A on (jopa pelkistetyssä) porrasmuodossa johtavin kertoimin paikoissa $(1, 1)$ ja $(2, 2)$, muodostavat sen 1. ja 2. sarakevektori sarakeavaruuden kannan. Tämä nähdään myös suoraan. Siis

$$\mathrm{col}(A) = \underline{\mathrm{span}\{[\,1 \quad 0\,]^T, [\,0 \quad 1\,]^T\} = \mathbb{R}^2},$$

ja $\dim(\mathrm{col}(A)) = 2$.

(c) Matriisin A nolla-avaruus on $\mathrm{null}(A) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \mid A\mathbf{x} = \mathbf{0}\}$. Jos $\mathbf{x} = [\,x_1 \quad x_2 \quad x_3\,]^T \in \mathbb{R}^3$, niin

$$A\mathbf{x} = \mathbf{0} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 0 \\ x_3 = t \text{ jollain } t \in \mathbb{R} \end{cases} \Leftrightarrow \mathbf{x} = t \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \text{ jollain } t \in \mathbb{R}.$$

Siis

$$\mathrm{null}(A) = \underline{\mathrm{span}\{[\,0 \quad 0 \quad 1\,]^T\} = \{(0, 0, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z \in \mathbb{R}\}},$$

ja $\dim(\mathrm{null}(A)) = 1$. (Yhteensopivasti: $\dim(\mathrm{null}(A)) = A$:n sarakkeiden lkm $- \dim(\mathrm{row}(A)) = 3 - 2 = 1$.)

Arvostelusta. 2p+2p+2p. Vastauksiksi riitti kannan tai span-muodon ilmoittaminen. Mutta kannan ja span-muodon keskenään sekoittamisesta sakotin 1p.

2. Olkoon A matriisi kokoa $n \times m$. Määritellään A:n *kuvajoukko* $\mathrm{Im}(A)$ niiden vektorien $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ joukkona, joille on olemassa sellainen $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^m$, että $A\mathbf{x} = \mathbf{y}$.

(a) Osoita aliavaruuden määritelmää käyttäen, että $\mathrm{Im}(A)$ on $\mathbb{R}^n$:n aliavaruus.

(b) Todista, että $\dim(\mathrm{Im}(A)) = \mathrm{Rank}(A)$.

(c) Olkoon matriisi A kuten tehtävässä 1. Määritä $\mathrm{Im}(A)$.

Ratk. **(a)** (i) Jos $\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2 \in \mathrm{Im}(A)$, niin on olemassa sellaiset $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in \mathbb{R}^m$, että $A\mathbf{x}_1 = \mathbf{y}_1$ ja $A\mathbf{x}_2 = \mathbf{y}_2$, joten

$$\mathbf{y}_1 + \mathbf{y}_2 = A\mathbf{x}_1 + A\mathbf{x}_2 = A(\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2) \in \mathrm{Im}(A).$$

(ii) Jos $\mathbf{y} \in \mathrm{Im}(A)$ ja $c \in \mathbb{R}$, niin on olemassa sellainen $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^m$, että $A\mathbf{x} = \mathbf{y}$, joten

$$c\mathbf{y} = cA\mathbf{x} = A(c\mathbf{x}) \in \mathrm{Im}(A).$$

(iii) $\mathbf{0}_n = A\mathbf{0}_m \in \mathrm{Im}(A)$.

Ehtojen (i)–(iii) mukaan $\mathrm{Im}(A)$ on $\mathbb{R}^n$:n aliavaruus.

(b) Olkoot $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_m \in \mathbb{R}^n$ matriisin A sarakevektorit. Tällöin, jos $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_m) \in \mathbb{R}^m$, niin $A\mathbf{x} = x_1\mathbf{a}_1 + \ldots + x_m\mathbf{a}_m$. Siis

$$(1) \qquad \mathrm{Im}(A) = \{A\mathbf{x} \mid \mathbf{x} \in \mathbb{R}^m\} = \{x_1\mathbf{a}_1 + \ldots + x_m\mathbf{a}_m \mid x_1, \ldots, x_m \in \mathbb{R}\} = \mathrm{span}\{\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_m\} = \mathrm{col}(A).$$

Täten $\dim(\mathrm{Im}(A)) = \dim(\mathrm{col}(A)) = \mathrm{Rank}(A)$.

(c) Olkoon A kuten tehtävässä 1. Tällöin (1):n ja tehtävän 1(b) nojalla on $\mathrm{Im}(A) = \mathrm{col}(A) = \mathbb{R}^2$.

Suoraan: Jos $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$, niin $A\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$. Siis $\mathrm{Im}(A) = \{A\mathbf{x} \mid \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3\} = \{\begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix}^T \mid x_1, x_2 \in \mathbb{R}\} = \mathbb{R}^2$.

Kolmas tapa: (a)-kohdan mukaan $\mathrm{Im}(A)$ on $\mathbb{R}^2$:n aliavaruus. Toisaalta (b)-kohdan tuloksen ja tehtävän 1 (a)- tai (b)-kohtien mukaan on $\dim(\mathrm{Im}(A)) = \mathrm{Rank}(A) = 2$. Siis $\mathrm{Im}(A) = \mathbb{R}^2$.

Arvostelusta. (a)-kohta: 1p+1p+1p=3p.

(b)-kohta: 1p+1p=2p. Oli osoitettava ensin (1); sitten vasta saattoi saada pisteen dim-laskusta. On huomattava, että vaikka riviekvivalenteilla matriiseilla on sama riviavaruus, niillä on yleensä eri kuvajoukko; kukaan ei saanutkaan pisteitä A:n rivien käytöstä.

(c)-kohta: 1p. Vastauksen tuli olla aliavaruus, siis *joukko*, jolloin $\mathbb{R}^2$:n sijasta hyväksyin muodot $\{\begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix}^T \mid x_1, x_2 \in \mathbb{R}\}$ ja $\mathrm{span}\{\begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}^T, \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}^T\}$. Mutta vastauksen ilmoittaminen *vektorina* $\begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix}^T$ ei vielä tuottanut pistettäkään; valitan.

3. Olkoon $A = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

(a) Etsi A:n ominaisarvot karakteristista polynomia käyttäen.

(b) Etsi A:n ominaisvektorit. Tarkasta tuloksesi kertolaskulla.

(c) Kirjoita A muotoon $A = PDP^{-1}$, jossa D on diagonaalinen, ja laske A^{2009}.

Ratk. (a) Ratkaistaan A:n karakteristinen yhtälö:

$$\det(A) = \det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} -1-\lambda & 2 \\ 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (-1-\lambda)(1-\lambda) - 0 \cdot 2 = \lambda^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow \lambda = \pm 1.$$

Siis A:n ominaisarvot ovat $\lambda = 1$ ja $\lambda = -1$. (Tämä nähdään myös yläkolmiomatriisista A suoraan.)

(b) Etsitään ominaisarvoon $\lambda = 1$ liittyvät A:n ominaisvektorit $\mathbf{u} = (u_1, u_2) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{\mathbf{0}\}$:

$$(A - I)\mathbf{u} = \begin{bmatrix} -2 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{u} = \mathbf{0} \Leftrightarrow \begin{cases} -2u_1 + 2u_2 = 0 \\ 0 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow u_2 = u_1 \Leftrightarrow \mathbf{u} = t \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (t \in \mathbb{R} \setminus 0).$$

Tarkastus (kun valitaan $t = 1$): $A\mathbf{u} = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (-1) \cdot 1 + 2 \cdot 1 \\ 0 \cdot 1 + 1 \cdot 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 + 2 \\ 0 + 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = 1\mathbf{u}$.

Etsitään ominaisarvoon $\lambda = -1$ liittyvät A:n ominaisvektorit $\mathbf{u} = (u_1, u_2) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{\mathbf{0}\}$:

$$(A - (-1)I)\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \mathbf{u} = \mathbf{0} \Leftrightarrow \begin{cases} 2u_2 = 0 \\ 2u_2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow u_2 = 0 \Leftrightarrow \mathbf{u} = t \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (t \in \mathbb{R} \setminus 0).$$

Tarkastus (kun valitaan $t = 1$): $A\mathbf{u} = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (-1) \cdot 1 + 2 \cdot 0 \\ 0 \cdot 1 + 1 \cdot 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = (-1)\mathbf{u}$.

(c) Määritellään diagonaalimatriisi $D = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ diagonaalin alkioina A:n ominaisarvot 1 ja -1. Määritellään matriisi $P = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ sarakevektoreina näihin ominaisarvoihin vastaavassa järjestyksessä liittyvät eräät ominaisvektorit $(1, 1)$ ja $(1, 0)$. Tällöin teorian nojalla P on kääntyvä ja pätee

$$A = PDP^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^{-1}.$$

Nyt

$$A^{2009} = PD^{2009}P^{-1} = P \begin{bmatrix} 1^{2009} & 0 \\ 0 & (-1)^{2009} \end{bmatrix} P^{-1} = P \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} P^{-1} = PDP^{-1} = A.$$

Arvostelusta. (a)-kohta: 1p.
(b)-kohta: 3p. Oikeat ominaisvektorit 1p+1p. Näiden virheetön tarkastus 1p. Jos oli käsittänyt tehtävän väärin niin (ja toi sen myös selvästi esille), että pitikin (yhtäpitävästi!) tarkastaa yhtälö $AP = PD$, sai 1p.
(c)-kohta: 2p. Oikeat (ja yhteensopivat) D ja P tuottivat 1p. En vaatinut, että olisi laskettu myös $P^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$. Matriisin A^{2009} laskeminen loppuun asti (vaikkakaan ei tarvinnut huomata, että tulos on juuri A itse) tuotti 1p.

4. Olkoon $A = \begin{bmatrix} 2 & \frac{1}{4} \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$.

(a) Mikä on ominaisarvon 2 algebrallinen kertaluku?

(b) Määritä kaikki ominaisarvoa 2 vastaavat ominaisvektorit. Mikä on ominaosarvon 2 geometrinen kertaluku?

(c) Kirjoita A muotoon $A = PJP^{-1}$, jossa J on Jordanin muoto.

Ratk. (a) Matriisin A karakteristinen polynomi on

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & \frac{1}{4} \\ 0 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (\lambda - 2)^2,$$

joten $\lambda = 2$ on sen kaksinkertainen nollakohta. Täten 2 on A:n ominaisarvo, jonka algebrallinen kertaluku on 2.

(b) Etsitään ominaisarvoon $\lambda = 2$ liittyvät A:n ominaisvektorit $\mathbf{v} = (v_1, v_2) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{\mathbf{0}\}$:

$$(A - 2I)\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{v} = \mathbf{0} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{4}v_2 = 0 \\ 0 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow v_2 = 0 \Leftrightarrow \mathbf{v} = t \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (t \in \mathbb{R} \setminus 0).$$

Siis ominaisavaruus $\operatorname{null}(A - \lambda I) = \operatorname{span}([1 \quad 0]^T)$ on 1-ulotteinen. Täten ominaisarvon 2 geometrinen kertaluku on 1.

(c) Valitaan ominaisvektori $\mathbf{v} = (1, 0)$. Etsitään vektori $\mathbf{w} = (w_1, w_2) \in \mathbb{R}^2$, jolla $(A - 2I)\mathbf{w} = \mathbf{v}$:

$$(A - 2I)\mathbf{w} = \mathbf{v} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{4}w_2 = 1 \\ 0 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow w_2 = 4 \Leftrightarrow \mathbf{w} = \begin{bmatrix} s \\ 4 \end{bmatrix} = s \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \end{bmatrix} = s\mathbf{v} + \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \end{bmatrix} \quad (s \in \mathbb{R});$$

valitaan $s = 0$, jolloin saadaan (yleistetty ominais)vektori $\mathbf{w} = (0, 4)$. Selvästi pari $(\mathbf{v}, \mathbf{w}) = ((1, 0), (0, 4))$ on vapaa. Muodostetaan matriisi $P = [\,\mathbf{v} \quad \mathbf{w}\,] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$, joka tällöin on kääntyvä, ja A:n Jordanin muoto $J = \begin{bmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$; tällöin luentojen mukaan on

$$A = PJP^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}^{-1}.$$

Arvostelusta. (a)-kohta: 1p.
(b)-kohta: 2p. Ominaisavaruudesta 1p ja geometrisesta kertaluvusta 1p.
(c)-kohta: 3p. Kustakin seuraavasta 1p: $\mathbf{w}$, P ja J. Pari $(\mathbf{v}, \mathbf{w})$ on *automaattisesti* vapaa. Siksi en vaatinut sitä erikseen todistettavaksi. Tämän osoittaa seuraava tulos, joka ilmeisesti luennoilla ohitettiin:

Lemma. Jos A on (2×2)-matriisi, $\lambda \in \mathbb{R}$, $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbb{R}^2$, $A\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}$, $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$ ja $(A - \lambda I)\mathbf{w} = \mathbf{v}$, niin pari $(\mathbf{v}, \mathbf{w})$ on vapaa.

Tod. Koska $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$, niin muuten on $\mathbf{w} = c\mathbf{v}$ jollain $c \in \mathbb{R}$, jolloin $\mathbf{v} = (A - \lambda I)\mathbf{w} = c(A - \lambda I)\mathbf{v} = c\mathbf{0} = \mathbf{0}$; ristiriita. ■