Lineaarialgebra ja matriisilasku II
4. harjoitustehtäväsarjan malliratkaisuita sekä ratkaisuhahmotelmia (E.V.)

1. Olkoon A neliömatriisi. Osoita:

a) Jos matriisissa A on nollarivi tai -sarake, niin $\det A = 0$.

b) Muodostetaan matriisi B kertomalla jonkin matriisin A rivin elementit vakiolla k. Silloin $\det B = k \det A$.

c) Muodostetaan matriisi B lisäämällä jokin matriisin A rivi johonkin toiseen matriisin A riviin vakiolla k kerrottuna. Silloin $\det B = \det A$.

Ratkaisu. a) Kehitetään matriisin A determinantti kyseisen nollarivin tai -sarakkeen suhteen, jolloin saadussa summassa jokaisessa termissa esiintyy tulontekijänä nolla.

b) Kehitetään matriisin B determinantti sen rivin suhteen jonka elementit kerrottiin vakiolla. Näin saatu lauseke on sama kuin matriisin A determinantin lauseke kehitettynä vastaavan rivin suhteen, paitsi että jokaisessa termissa on ylimääräisenä tekijänä k.

c) Lisätään matriisin A rivi $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ sen riviin $j \in \{1, 2, \ldots, n\} \setminus \{i\}$ vakiolla $k \in \mathbb{R}$ kerrottuna. Olkoon C se matriisi joka saadaan kun matriisin A rivi j korvataan sen rivillä i. Tällöin matriisilla C on kaksi yhtäsuurta riviä ja siis $\det C = 0$. Toisaalta

$$\det B - \det A = k \det C = 0.$$

2. Olkoon B mielivaltainen $n \times n$-matriisi ja E $n \times n$-alkeismatriisi. Todista, että $\det(EB) = \det E \cdot \det B$.

Ratkaisu. Jos matriisi E vaihtaa matriisin B kaksi riviä keskenään, niin $\det E = -1$ ja

$$\det EB = -B = \det E \cdot \det B.$$

Jos E kertoo matriisin B jonkin rivin elementit vakiolla $k \in \mathbb{R}$, niin $\det E = k$ ja edellisen tehtävän b)-kohdan nojalla

$$\det EB = k \det B = \det E \cdot \det B.$$

Lopuksi, olkoon matriisi E sellainen alkeismatriisi, että kerrottaessa sillä matriisi B vasemmalta puolelta se lisää matriisin B jonkin rivin johonkin toiseen matriisin B riviin jollakin vakiolla kerrottuna. Tällöin $\det E = 1$. Toisaalta edellisen tehtävän c)-kohdan nojalla

$$\det EB = \det B = \det E \cdot \det B.$$

3. Olkoon A yläkolmiomatriisi

$$A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ 0 & d & e \\ 0 & 0 & f \end{bmatrix}.$$

a) Näytä, että $\det A = adf$.
b) Osoita, että matriisin A lävistäjäelementit ovat sen ominaisarvot.

Ratkaisu. a) Kehitetään matriisin A determinantti ensimmäisen sarakkeen suhteen, jolloin saadaan suoraan

$$\det A = a \cdot \begin{vmatrix} d & e \\ 0 & f \end{vmatrix} = adf.$$

b) Matriisin A ominaisarvot saadaan yhtälöstä

$$\begin{vmatrix} a-\lambda & b & c \\ 0 & d-\lambda & e \\ 0 & 0 & f-\lambda \end{vmatrix} = 0,$$

joka a)-kohdan nojalla sievenee muotoon $(a-\lambda)(d-\lambda)(f-\lambda) = 0$. Tämän ratkaisut ovat täsmälleen $\lambda \in \{a, d, f\}$.

4. Määrää matriisin

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 6 & 0 \end{bmatrix}$$

ominaisarvot etsimällä karakteristisen polynomin juuret. Anna kanta jokaisen ominaisarvon ominaisavaruudelle.

Ratkaisu. Matriisin A karakteristinen polynomi on

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & 4 \\ 6 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 2\lambda - 24.$$

Tämän nollakohdat, eli matriisin A ominaisarvot, ovat $\lambda \in \{6, -4\}$.

Ominaisarvoa 6 vastaavat matriisin A ominaisvektorit $\langle x, y\rangle \in \mathbb{R}^2$ saadaan yhtälöistä

$$\begin{bmatrix} 6x \\ 6y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 6 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x+4y \\ 6x \end{bmatrix}.$$

Vertailemalla ensimmäisiä koordinaatteja saadaan ehto $x = y$. Toisaalta vektorit $\langle t, t\rangle$, missä $t \in \mathbb{R}^\times$ on mielivaltainen, varmasti ovat matriisin A ominaisvektoreita. Siis ominaisarvoa 6 vastaavan ominaisavaruuden kannaksi voidaan valita vaikkapa vektori $\langle 1, 1\rangle$.

Samalla tavalla ominaisarvoa -4 vastaavat matriisin A ominaisvektorit $\langle x, y\rangle \in \mathbb{R}^2$ saadaan yhtälöistä

$$\begin{bmatrix} -4x \\ -4y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 6 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x+4y \\ 6x \end{bmatrix}.$$

Vertailemalla ensimmäisiä koordinaatteja saadaan vaatimus $3x = -2y$. Toisaalta varmasti vektorit $\langle 2t, -3t\rangle$ ovat matriisin A ominaisarvoa -4 vastaavia ominaisvektoreita kaikilla $t \in \mathbb{R}^\times$. Siispä matriisin A ominaisarvoa -4 vastaavan ominaisavaruuden kannaksi voidaan valita vaikkapa vektori $\langle 2, -3\rangle$.

5. Osoita, että A ja B eivät ole similaariset, kun

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -5 & 7 \end{bmatrix} \quad \text{ja} \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -4 & 6 \end{bmatrix}.$$

Ratkaisu. Matriisin A ominaisarvot saadaan yhtälöstä

$$\begin{vmatrix} 3-\lambda & -1 \\ -5 & 7-\lambda \end{vmatrix} = 0,$$

joka sievenee toisen asteen yhtälöksi $\lambda^2 - 10\lambda + 16 = 0$. Tämän ratkaisut ovat $\lambda \in \{2, 8\}$. Toisaalta matriisin B ominaisarvot saadaan yhtälöstä

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 \\ -4 & 6-\lambda \end{vmatrix} = 0,$$

joka taas sievenee muotoon $\lambda^2 - 8\lambda + 16 = 0$. Tämän ainoa ratkaisu on $\lambda = 4$. Siis matriisilla B on ominaisarvo, joka ei ole matriisin A ominaisarvo.

Olkoon $x \in \mathbb{R}^2$ matriisin B ominaisarvoa 4 vastaava ominaisvektori. [Esimerkiksi vektori $x = \langle 1, 2\rangle$ kelpaa.] Jos A ja B olisivat similaariset, löytyisi kääntyvä 2×2-reaalimatriisi C, jolle $A = C^{-1}BC$. Erityisesti olisi

$$AC^{-1}x = C^{-1}BCC^{-1}x = C^{-1}Bx = C^{-1}(4x) = 4C^{-1}x,$$

ja luku 4 olisi matriisin A ominaisarvo.

6. Olkoon

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}.$$

a) Etsi matriisin A ominaisarvot.
b) Etsi matriisin A ominaisvektorit.
c) Kirjoita matriisi A muotoon $A = PDP^{-1}$, missä D on lävistäjämatriisi

Ratkaisu. a) Matriisin A ominaisarvot saadaan yhtälöstä

$$\begin{vmatrix} 5-\lambda & 2 \\ 2 & 5-\lambda \end{vmatrix} = 0,$$

joka sievenee toisen asteen yhtälöksi $\lambda^2 - 10\lambda + 21 = 0$. Tämän ratkaisut ovat $\lambda \in \{3, 7\}$.

b) Matriisin A ominaisarvoa 3 vastaavat ominaisvektorit $\langle x, y\rangle \in \mathbb{R}^2$ saadaan yhtälöistä

$$\begin{bmatrix} 3x \\ 3y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5x+2y \\ 2x+5y \end{bmatrix}.$$

Nämä sieventyvät yksinkertaiseen muotoon $x = -y$. Siis matriisin A ominaisarvoa 3 vastaavat täsmälleen ominaisvektorit $\langle t, -t\rangle$, missä parametri $t \in \mathbb{R}^\times$ on mielivaltainen.

Samaan tapaan matriisin A ominaisarvoa 7 vastaavat ominaisvektorit $\langle x, y\rangle \in \mathbb{R}^2$ vastaavat ominaisvektorit saadaan yhtälöistä

$$\begin{bmatrix} 7x \\ 7y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5x+2y \\ 2x+5y \end{bmatrix}.$$

Nämä yhtälöt sieventyvät vieläkin yksinkertaisempaan muotoon $x = y$. Matriisin A ominaisarvoa 7 vastaavat ominaisvektorit ovat siis täsmälleen vektorit $\langle t, t\rangle$, missä $t \in \mathbb{R}^\times$ on mielivaltainen.

c) Valitaan vaikkapa matriisin A ominaisarvoja 3 ja 7 vastaavat ominaisvektorit $\left\langle \frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}} \right\rangle$ ja $\left\langle \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}} \right\rangle$, ja valitaan

$$P = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}.$$

Tämän käänteismatriisiksi saadaan helposti

$$P^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}.$$

Kun valitaan lävistäjämatriisiksi D matriisi

$$D = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 7 \end{bmatrix},$$

saadaan suoraan

$$\begin{aligned} PDP^{-1} &= \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \frac{3}{\sqrt{2}} & \frac{7}{\sqrt{2}} \\ -\frac{3}{\sqrt{2}} & \frac{7}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 5 \end{bmatrix} = A. \end{aligned}$$