Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Llneaarialgebra ja matriisilaskenta II (Syksy 2009)
Harjoitus 3
Ratkaisuja (Timo Vuori)

1. Osoitetaan, että seuraavat kuvaukset ovat lineaarikuvauksia ja lasketaan niiden matriisiesitys standardikannassa.

$$T\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x & + & y \\ x & - & y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix},$$

joten

$$T\left(a\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = T\begin{bmatrix} ax \\ ay \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ax & + & ay \\ ax & - & ay \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a(x+y) \\ a(x-y) \end{bmatrix} = a\begin{bmatrix} x+y \\ x-y \end{bmatrix} = aT\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

ja

$$T\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix}\right) = T\begin{bmatrix} x_1 & + & x_2 \\ y_1 & + & y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (x_1+x_2) & + & (y_1+y_2) \\ (x_1+x_2) & - & (y_1+y_2) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} (x_1+y_1) & + & (x_2+y_2) \\ (x_1-y_1) & + & (x_2-y_2) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} x_1+y_1 \\ x_1-y_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x_2+y_2 \\ x_2-y_2 \end{bmatrix} = T\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} + T\begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix};$$

siis T on lineaarinen.

$$S\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -y \\ x+2y \\ 3x-4y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 2 \\ 3 & -4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix},$$

joten

$$S\left(a\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = S\begin{bmatrix} ax \\ ay \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -ay \\ ax+2ay \\ 3ax-4ay \end{bmatrix} = a\begin{bmatrix} -y \\ x+2y \\ 3x-4y \end{bmatrix} = aS\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

ja

$$S\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix}\right) = S\begin{bmatrix} x_1 & + & x_2 \\ y_1 & + & y_2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -(y_1+y_2) \\ (x_1+x_2)+2(y_1+y_2) \\ 3(x_1+x_2)-4(y_1+y_2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -y_1-y_2 \\ (x_1+2y_1)+(x_2+2y_2) \\ (3x_1-4y_1)+3(x_2-4y_2) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -y_1 \\ x_1+2y_1 \\ 3x_1-4y_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -y_2 \\ x_2+2y_2 \\ 3x_2-4y_2 \end{bmatrix} = S\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} + S\begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix};$$

siis S on lineaarinen.

$$(S \circ T)\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = S\left(T\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = S\left(\begin{bmatrix} 1 & + & 1 \\ 1 & - & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 2 \\ 3 & -4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0-1 & 0+1 \\ 1+2 & 1-2 \\ 3-4 & 3+4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 3 & -1 \\ -1 & 7 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

2. Kuvaukset

$$T\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y \\ x^2 \end{bmatrix}$$

ja

$$S\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y+1 \\ y-1 \end{bmatrix}$$

eivät ole lineaarisia. Valitaan

$$[\ x \quad y\ ]^T = [\ 1 \quad 0\ ]^T,$$

jolloin

$$T\left(2\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right) = T\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \end{bmatrix} \neq 2T\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = 2\begin{bmatrix} 0 \\ 1^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Valitaan

$$[\ x \quad y\ ]^T = [\ 0 \quad 0\ ]^T,$$

jolloin

$$S\left(0\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}\right) = S\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0+1 \\ 0-1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \neq 0S\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = 0\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

3. Kierto $\pi/4$ verran vastapäivään, sitten projektio y-akselille ja lopuksi taas kierto $\pi/4$ verran vastapäivään.

Merkitään kiertomatriisia

$$R = \begin{bmatrix} \cos\pi/4 & -\sin\pi/4 \\ \sin\pi/4 & \cos\pi/4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}$$

ja projektiota y-akselille

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Tällöin yhdistetyn kuvauksen (kierto-projektio-kierto) matriisi on

$$RPR = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -1/\sqrt{2} \cdot 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \cdot 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \cdot 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \cdot 1/\sqrt{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1/2 & -1/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{bmatrix}$$

4. a) Osoitetaan, että vektori $\overline{v}$ on matriisin A ominaisvektori, kun

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 6 & 0 \end{bmatrix}$$

ja

$$\overline{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow A\overline{v} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 6 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \cdot 1 + 1 \cdot (-2) \\ 6 \cdot 1 + 0 \cdot (-2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 \\ 6 \end{bmatrix} = -3 \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}$$

Siis vektori $\overline{v}$ on vastaavaominaisarvoa -3 vastaava ominaisvektori..

b)

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

ja

$$\overline{v} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow A\overline{v} = \begin{bmatrix} 3 \cdot 2 + 0 + 0 \\ 0 + 1 \cdot (-1) - 2 \cdot 1 \\ 1 \cdot 2 + 0 + 1 \cdot 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ -3 \\ 3 \end{bmatrix} = 3 \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} = 3\overline{v}$$

Siis vektori $\overline{v}$ on ominaisarvoa 3 vastaava ominaisvektori..

5 a) Näytetään, että λ on matriisin A ominaisarvo, ja etsitään vastaava ominaisvektori, kun

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}, \lambda = 3.$$

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 2-3 & 2 \\ 2 & -1-3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -4 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-4) - 2 \cdot 2 = 0,$$

joten $\lambda = 3$ on A:n ominaisarvo.

$$(A-\lambda I)\overline{x} = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -x+2y \\ 2x-4y \end{bmatrix} = \overline{0}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -x+2y=0 \quad \Leftrightarrow \quad x=2y \\ 2x-4y=0 \end{cases}$$

Siis, jos valitaan $y=1$, niin $x=2\cdot 1=2$, joten $\overline{x} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \end{bmatrix}^T$ on ominaisarvoon $\lambda=3$ liittyvä ominaisvektori. (Vastaava normitettu ominaisvektori

$$= (2^2+1^2)^{-1/2}[\ 2 \quad 1\ ]^T$$

$= (1/\sqrt{5})[\ 2 \quad 1\ ]^T$.)

b)

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \lambda = -1.$$

$$\det(A-\lambda I) = \begin{vmatrix} 1-(-1) & 0 & 2 \\ -1 & 1-(-1) & 1 \\ 2 & 0 & 1-(-1) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 0+(-1)^{2+2}\cdot 2 \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} +0 = 0,$$

joten $\lambda=-1$ on A:n ominaisarvo.

$$(A-\lambda I)\overline{x} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x+2z \\ -x+2y+z \\ 2x+2z \end{bmatrix} = \overline{0}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} 2x+2z & =0 \\ -x+2y+z & =0 \\ 2x+2z & =0 \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} x+z & =0 \\ -x+2y+z & =0 \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} z & =-x \\ -x+2y+z & =0 \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} z & =-x \\ x & =y \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow x=y=-z$$

Valitaan $z=-1 \Rightarrow x=y=1 \Rightarrow \overline{x} = [\ 1 \quad 1 \quad -1\ ]^T$ on eräs ominaisarvoon $\lambda=-1$ liittyvä ominaisvektori.(Vastaava normitettu ominaisvektori on $(1/\sqrt{3}) \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}^T$.)

6. a)

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 5 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 5 & 1 & -14 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = (-1)^{1+1}\cdot 1 \begin{vmatrix} 1 & -14 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -14 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 1\cdot 2-1\cdot(-14) = 2+14 = 16,$$

jossa on kerrottu 1. sarake (-3):lla ja lisätty tulos 3. sarakkeeseen.

b)

$$\begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta & \tan\theta \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$

$$= \cos\theta \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} (+0+0)$$
$$= \cos\theta(\cos^2\theta + \sin^2\theta) = \cos\theta$$