Matematiikan laitos
Lineaarialgebra ja matriisilaskenta II
Harjoitus 2
16.–20.11.2009
Ratkaisuehdotuksia
Aleksandr Nuija

1. Osoita, että $w \in \operatorname{span}(\mathcal{B})$, kun

$$\mathcal{B} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} \right\}, \qquad w = \begin{bmatrix} 1 \\ 6 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Mitkä ovat vektorin w koordinaatit kannassa $\mathcal{B}$?

Ratkaisu: Vektori w kuuluu aliavaruuteen $\operatorname{span}(\mathcal{B})$ jos ja vain jos on olemassa reaaliluvut x_1, x_2 joille

$$w = \begin{bmatrix} 1 \\ 6 \\ 2 \end{bmatrix} = x_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

Tämä yhtälö on yhtäpitävä lineaarisen yhtälöryhmän

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1 + x_2 = 1, \\ 2x_1 = 6, \\ -x_2 = 2 \end{array} \right. \tag{1}$$

kanssa.
Tämän yhtälöryhmän toisesta yhtälösta saadaan $x_1 = 3$ ja kolmannesta yhtälöstä saadaan $x_2 = -2$. Nämä toteuttavat myos ensimmäisen yhtälön, sillä $3 + (-2) = 1$. Näin ollen yhtälöryhmällä on (tasan yksi) ratkaisu, joten $w \in \operatorname{span}(\mathcal{B})$.
Helposti nähdään, että $\mathcal{B}$ on lineaarisesti riippumaton joukko. Tämä itse asiassa seuraa myös siitä, että yllä tarkastellulla yhtälöryhmällä (1) on TASAN YKSI ratkaisu. Nimittäin jos $\mathcal{B}$ ei olisi lineaarisesti riippumaton, niin olisi olemassa reaaliluvut a, b, joista ainakin yksi ei ole nolla, niin että

$$a \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} + b \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} = 0.$$

Toisaalta tiedämme jo, että

$$w = \begin{bmatrix} 1 \\ 6 \\ 2 \end{bmatrix} = 3 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} + (-2) \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

Laskemalla nämä yhteen saadaan

$$w = \begin{bmatrix} 1 \\ 6 \\ 2 \end{bmatrix} = (3+a)\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} + (b-2)\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

Tämä implikoi, että yhtälöryhmällä (1) on myös ratkaisu $x_1 = 3+a, x_2 = b-2$. Tämä on kuitenkin mahdotonta, sillä tiedämme jo, että tällä yhtälöryhmällä on vain yksi ratkaisu $x_1 = 3, x_2 = -2$. Näin ollen $\mathcal{B}$ on lineaarisesti riippumaton, joten erityisesti se on avaruuden span($\mathcal{B}$) kanta. Vektorin w koordinaatit kannan $\mathcal{B}$ suhteen ovat $(3, -2)$.

2. Olkoon

$$\mathcal{B} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \right\}.$$

(a) Osoita, että $\mathcal{B}$ on $\mathbb{R}^2$:n kanta.

(b) Mitkä ovat standardikantavektorin $\vec{e}_1 \in \mathbb{R}^2$ koordinaatit kannassa $\mathcal{B}$?

Ratkaisu: Osoitetaan ensin, että standardikantavektorit $\vec{e}_1, \vec{e}_2 \in \mathbb{R}^2$ kuuluvat aliavaruuteen span($\mathcal{B}$). Tästä on myös samalla hyötyä b)-kohdan ratkaisemisen kannalta. Menetellään samalla tavalla kuin edellisessä tehtävässä. Vektori $\vec{e}_1$ on aliavaruudessa span($\mathcal{B}$) jos ja vain jos on olemassa reaaliluvut x_1, x_2, joille

$$\vec{e}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = x_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

Tämä on yhtäpitävä lineaarisen yhtälöryhmän

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 1, \\ x_1 - x_2 = 0, \end{cases}$$

kanssa. Helposti nähdään, että tällä yhtälöryhmällä on tasan yksi ratkaisu $x_1 = x_2 = 1/2$.

Samalla tavalla todetaan, että $\vec{e}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \in$ span($\mathcal{B}$) jos ja vain jos yhtälöryhmällä

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 0, \\ x_1 - x_2 = 1, \end{cases}$$

on ratkaisu. Se pitää paikkansa, sillä helposti nähdään, että tällä yhtälöryhmällä on tasan yksi ratkaisu $x_1 = 1/2, x_2 = -1/2$.

Näin ollen standardikannanvektorit ovat aliavaruudessa span($\mathcal{B}$). Koska jokainen $\mathbb{R}^2$:n vektori on lineaarinen kombinaatio standardikannanvektoreista, myös jokainen $\mathbb{R}^2$:n vektori on avaruudessa span($\mathcal{B}$). Toisin sanoen $\mathcal{B}$ virittää avaruuden $\mathbb{R}^2$. Toisaalta avaruuden $\mathbb{R}^2$ dimensio on 2 ja $\mathcal{B}$ on kahden vektorin joukko, joten $\mathcal{B}$ on myös lineaarisesti riippumaton joukko. Näin ollen $\mathcal{B}$ on $\mathbb{R}^2$:n kanta ja a)-kohta on todistettu. Kohdassa b) pyydetyt $\vec{e}_1$:n koordinaatit kannassa $\mathcal{B}$ on jo laskettu yllä,

$$\vec{e}_1 = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

Siis $\vec{e}_1 \in \mathbb{R}^2$ koordinaatit kannassa $\mathcal{B}$ ovat $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$.

Huomautus: Käytämme tehtävän ratkaisussa seuraava tulosta: Olkoon V n-ulotteinen vektoriavaruus ja $(v_1, \ldots, v_n)$ jono, joka koostuu n:stä V:n vektorista. Tällöin $(v_1, \ldots, v_n)$ on V:n kanta jos ja vain jos se on joko lineaarisesti riippumaton tai jos ja vain jos virittää avaruuden V. Olemme näyttäneet, että tehtävässä annettu joukko $\mathcal{B}$ virittää avaruuden $\mathbb{R}^2$, josta juuri mainitut tuloksen mukaan seuraa, että $\mathcal{B}$ on $\mathbb{R}^2$:n kanta. Tehtävän kohta a) voidaan ratkaista myös näyttämällä, että $\mathcal{B}$ on lineaarisesti riippumaton, jolloin yllämainitusta tuloksesta myöskin seuraisi, että $\mathcal{B}$ on $\mathbb{R}^2$:n kanta. Tämä ei kuitenkaan auttaisi b)-kohdan ratkaisemisessa, joten olisimme joutuneet laskemaan $\vec{e}_1$:n koordinaatit kannassa $\mathcal{B}$ erikseen joka tapauksessa.

Toki, jos ei haluaa nojautua yllämainitun tulokseen, voi yhtä hyvin osoittaa määritelmästä lähtien erikseen, että $\mathcal{B}$ sekä virittää $\mathbb{R}^2$:n että on lineaarisesti riippumaton, mutta se ei ole tässä tapauksessa vättämätöntä.

3. Olkoon $T\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ se lineaarikuvaus, joka peilaa vektorin pystysuoran standardikoordinaattiakselin suhteen.

(a) Mikä on T:n matriisiesitys standardikannassa?
(b) Mikä on T:n matriisiesitys tehtävän 2 kannassa $\mathcal{B}$?

Ratkaisu: Olkoon $L\colon V \to W$ lineaarikuvaus, $(v_1, \ldots, v_n)$ V:n kanta ja $(w_1, \ldots, w_m)$ W:n kanta. Kuvauksen L matriisiesitys kantojen $(v_1, \ldots, v_n)$ ja $(w_1, \ldots, w_m)$ suhteen saadaan laskemalla $L(v_i)$:n koordinaatit kannan $(w_1, \ldots, w_m)$ suhteen ja laittamalla tulos matriisin i:nneksi sarakkeeksi.

a) Lasketaan standardikannan vektorien kuvat kuvauksessa T:

$$T(\vec{e}_1) = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix} = (-1)\vec{e}_1 + 0\vec{e}_2,$$

$$T(\vec{e}_2) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = 0\vec{e}_1 + 1\vec{e}_2.$$

Saadaan siis matriisiesitys

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

b) Lasketaan $\mathcal{B}$:n vektorien kuvat kuvauksessa T:

$$T(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}) = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} = 0\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + (-1)\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix},$$

$$T(\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}) = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \end{bmatrix} = (-1)\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + 0\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

Saadaan matriisiesitys

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

4. Osoita, että jos matriisin A sarakkeet ovat lineaarisesti riippumattomat, niin ne muodostavat kannan avaruudelle col(A).

Ratkaisu: Avaruus col(A) on määritelmän mukaan A:n sarakevektorien virittämä. Näin ollen A:n sarakkeet ovat lineaarisesti riippumattomat jos ja vain jos ne muodostavat col(A):n kannan.

5. Olkoon A kääntyvä 2×2-matriisi.
(a) Määrää null(A).
(b) Määrää row(A).
(c) Määrää row(A^T).

Ratkaisu: a) Null(A) koostuu vektoreista $x \in \mathbb{R}^2$ jotka toteuttavat ehdon

$$Ax = 0.$$

Koska A on kääntyvä, ainoa vektori joka toteuttaa tämän on nollavektori, sillä jos $Ax = 0$, niin

$$x = A^{-1}Ax = A^{-1}0 = 0.$$

Näin ollen Null(A) $= \{0\}$ on triviaaliavaruus.

b) Astelauseen nojalla pätee

$$\dim \operatorname{null}(A) + \dim \operatorname{row}(A) = 2,$$

josta a)-kohdan nojalla seuraa, että $\operatorname{row}(A)$ on 2-ulotteinen $\mathbb{R}^2$:n aliavaruus. Toisaalta $\mathbb{R}^2$ on ainoa itsensä 2-ulotteinen aliavaruus, joten $\operatorname{row}(A) = \mathbb{R}^2$.

c) Jos A on kääntyvä 2×2-matriisi, nin myös A^T on kääntyvä 2×2-matriisi, joten b)-kohdan nojalla $\operatorname{row}(A^T) = \mathbb{R}^2$.

6. Neliömatriisit A ja B ovat *similaariset*, jos on olemassa sellainen kääntyvä matriisi P, että $P^{-1}AP = B$. Tällöin merkitään $A \sim B$.
Osoita, että similaarisuusrelaatiolle pätee
(a) $A \sim A$,
(b) jos $A \sim B$, niin $B \sim A$,
(c) jos $A \sim B$ ja $B \sim C$, niin $A \sim C$.

Ratkaisu: Olkoon A $n \times n$-matriisi. Yksikkömatriisi I_n on kääntyvä ja pätee

$$A = I^{-1}AI.$$

Näin ollen $A \sim A$.

Oletetaan, että $A \sim B$. Tällöin on olemassa sellainen kääntyvä matriisi P, että $P^{-1}AP = B$. Kertomalla tämä yhtälö vasemmalta P:llä ja oikealla P^{-1}:llä saadaan

$$A = P(P^{-1}AP)P^{-1} = PBP^{-1}.$$

Olkoon $Q = P^{-1}$; tällöin Q on kääntyvä ja

$$Q^{-1}BQ = PBP^{-1} = A.$$

Näin ollen $B \sim A$.

Oletetaan, että $A \sim B$ ja $B \sim C$. Tällöin on olemassa sellaiset kääntyvät matriisit P, Q, että

$$P^{-1}AP = B,$$
$$Q^{-1}BQ = C.$$

Tästä seuraa, että

$$C = Q^{-1}BQ = Q^{-1}P^{-1}APQ = (PQ)^{-1}A(PQ).$$

Matriisi PQ on kääntyvä, joten $A \sim C$.