2x2-matriisien kanoniset muodot

Annettu matriisi $\underset{2\times 2}{A}$.

Lasketaan ominaisarvot eli karakteristisen polynomin

$$\det(A - \lambda I)$$

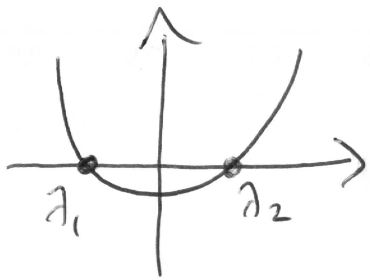
juuret. Silloin jokin seuraavista kolmesta vaihtoehdosta toteutuu:

1 Reaaliset juuret (erisuuret)

$\lambda_1 \in \mathbb{R}$

$\lambda_2 \in \mathbb{R}$

$\lambda_1 \neq \lambda_2$

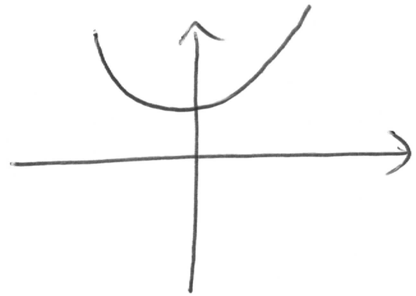


2 Kompleksiset juuret

$\mu = a + ib$

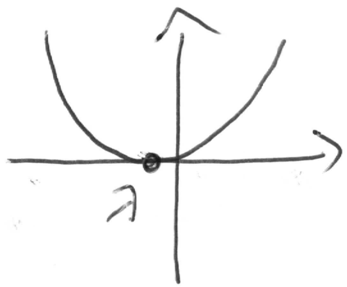
$\bar{\mu} = a - ib$

$b \neq 0$



3 Reaalinen tuplajuuri $\lambda \in \mathbb{R}$

Algebrallinen kertaluku = 2.



Geometrisella kertaluvulla kaksi mahdollista arvoa:

3A Geometrinen kertaluku 2

3B Geometrinen kertaluku 1

Vaihtoehtojen 1 ja 3A tapauksissa voimme diagonalisoida matriisin A:

Tapauksessa 1 lasketaan ominaisvektorit

$$A\vec{v}_1 = \lambda_1 \vec{v}_1, \quad \vec{v}_1 \neq 0,$$
$$A\vec{v}_2 = \lambda_2 \vec{v}_2, \quad \vec{v}_2 \neq 0,$$

ja silloin $\vec{v}_1$ ja $\vec{v}_2$ ovat automaattisesti lineaarisesti riippumattomat.

Tapauksessa 3A määrätään kaksi lineaarisesti riippumatonta ominaisvektoria:

$$A\vec{v}_1 = \lambda \vec{v}_1, \quad \vec{v}_1 \neq 0,$$
$$A\vec{v}_2 = \lambda \vec{v}_2, \quad \vec{v}_2 \neq 0.$$

Tämä on mahdollista, koska λ:n geometrinen kertaluku

$$\dim E_\lambda = \dim \operatorname{null}(A - \lambda I) = 2.$$

Kirjoitetaan $P = [\vec{v}_1 \ \vec{v}_2]$ eli asetetaan ominaisvektorit matriisin P sarakkeiksi. Silloin P on peruslauseen nojalla kääntyvä. Edelleen määritellään

$$D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}$$

(tapauksessa 3A tietty $D = \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}$) ja silloin pätee

$$P^{-1}AP = D,$$

eli A on diagonalisoitu.

Vaihtoehdossa 2 ratkaisemme kompleksisen ominaisvektorin $\vec{w} \in \mathbb{C}^2$, joka siis on pystyvektori $\vec{w} = \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{bmatrix}$, missä $w_1 \in \mathbb{C}$ ja $w_2 \in \mathbb{C}$. Vaadimme

$$A\vec{w} = \mu \vec{w}, \quad \vec{w} \neq 0,$$

ja kirjoitamme ratkaisun muotoon $\vec{w} = \vec{u} + i\vec{v}$, missä $\vec{u} \in \mathbb{R}^2$ ja $\vec{v} \in \mathbb{R}^2$. Tällöin $\vec{u}$ ja $\vec{v}$ ovat aina lineaarisesti riippumattomat (todistus sivuutetaan).

Asetetaan $P = [\vec{u} \ \ \vec{v}]$; tällöin peruslauseen nojalla P on kääntyvä. Edelleen merkitään

$$D = \begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix},$$

missä $\mu = a + ib$.

Silloin pätee

$$P^{-1}AP = D.$$

Vaihtoehdossa (3B) on mahdollista löytää vain yksi lin. riippumaton ominaisvektori $\vec{v} \neq 0$, jolle siis $A\vec{v} = \lambda \vec{v}$.

Ratkaistaan $\vec{w} \neq 0$ yhtälöstä

$$(A-\lambda I)\vec{w} = \vec{v}. \qquad (*)$$

Seuraavat asiat pitävät paikkansa, mutta todistukset sivuutetaan:

(i) Yhtälöllä $(*)$ on ratkaisu $\vec{w} \neq 0$,

(ii) Ratkaisu $\vec{w}$ voidaan valita lineaarisesti riippumattomaksi $\vec{v}$:stä.

Matriisin A kanoninen Jordanin muoto on

$$J = \begin{bmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix},$$

ja voimme kirjoittaa

$$P^{-1}AP = J,$$

kun $P = [\vec{v} \ \vec{w}]$.

Huom: $I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = P^{-1}P$

$= P^{-1}[\vec{v} \ \vec{w}]$

$= [P^{-1}\vec{v} \ \ P^{-1}\vec{w}]$,

joten $P^{-1}\vec{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$,

$P^{-1}\vec{w} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$.

Merkitään $\vec{e}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ ja $\vec{e}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$.

Muistetaan, että 2x2-matriisin sarakkeet saadaan esiin näin:

$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\vec{e}_1 = \begin{bmatrix} a \\ c \end{bmatrix}$ ja $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\vec{e}_2 = \begin{bmatrix} b \\ d \end{bmatrix}$

Määrätään matriisin

$J = P^{-1}AP$ sarakkeet:

$J\vec{e}_1 = P^{-1}AP\vec{e}_1 = P^{-1}A\vec{v} = P^{-1}\lambda\vec{v}$

$= \lambda P^{-1}\vec{v} = \lambda\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda \\ 0 \end{bmatrix}$

$J\vec{e}_2 = P^{-1}AP\vec{e}_2 = P^{-1}A\vec{w}$

$= P^{-1}(\lambda\vec{w} + \vec{v})$

$= \lambda P^{-1}\vec{w} + P^{-1}\vec{v} = \lambda\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} 1 \\ \lambda \end{bmatrix}$.