6. OMINAISARVOT JA DIAGONALISOINTI

6.1. Ominaisarvot ja ominaisvektorit

Olkoon V äärellisulotteinen vektoriavaruus, $\dim(V) = n \geq 1$ ja $L : V \to V$ lineaarikuvaus.

Määritelmä 6.1.1. Skalaari $\lambda \in \mathbb{R}$ on L:n *ominaisarvo*, jos on olemassa vektori $\mathbf{v} \in V$, $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$, jolla

$$L(\mathbf{v}) = \lambda \mathbf{v}.$$

Tällöin jokainen $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$, jolla $L(\mathbf{v}) = \lambda \mathbf{v}$, on L:n ominaisarvoon λ liittyvä *ominaisvektori*.

Neliömatriisin $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ ominaisarvot ja -vektorit ovat vastaavan lineaarikuvauksen $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ ominaisarvot ja -vektorit.

Kun $\lambda \in \mathbb{R}$, merkitään

$$\begin{aligned} V_\lambda = V_\lambda(L) &= \{\mathbf{v} \in V \mid L(\mathbf{v}) = \lambda \mathbf{v}\} \\ &= \{\mathbf{v} \in V \mid (L - \lambda \,\mathrm{id_V})(\mathbf{v}) = \mathbf{0}\} \\ &= \mathrm{Ker}(L - \lambda \,\mathrm{id_V}). \end{aligned}$$

Lauseen 4.2.1 nojalla V_λ on V:n aliavaruus. Edelleen 6.1.1:n mukaan λ on L:n ominaisarvo $\iff V_\lambda \neq \{\mathbf{0}\}$. Tällöin V_λ on λ:aan liittyvä L:n *ominaisavaruus*. Vektorit $\mathbf{v} \in V_\lambda$, $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$, ovat siis λ:aan liittyvät L:n ominaisvektorit. Luku $\dim(V_\lambda) \geq 1$ on ominaisarvon λ (geometrinen) *kertaluku*.

Huomautus 6.1.2. a) Jos λ on L:n ominaisarvo, aliavaruus V_λ on L-invariantti, ts. $L(V_\lambda) \subset V_\lambda$ (jos $\mathbf{v} \in V_\lambda$, niin $L(\mathbf{v}) = \lambda\mathbf{v} \in V_\lambda$, koska V_λ on aliavaruus). Tällöin L:n rajoittuma $L|V_\lambda : V_\lambda \to V_\lambda$ on homotetia $\mathbf{v} \mapsto \lambda \mathbf{v}$.

b) Jos $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ ovat L:n ominaisarvoja ja $\lambda \neq \mu$, niin $V_\lambda \cap V_\mu = \{\mathbf{0}\}$ ($\mathbf{v} \in V_\lambda \cap V_\mu \implies \lambda\mathbf{v} = L(\mathbf{v}) = \mu\mathbf{v} \implies (\lambda - \mu)\mathbf{v} = \mathbf{0} \implies \mathbf{v} = \mathbf{0}$, sillä $\lambda - \mu \neq 0$). Siten jokainen $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$ voi olla korkeintaan yhteen L:n ominaisarvoon liittyvä ominaisvektori.

Lause 6.1.3. *$\lambda \in \mathbb{R}$ on L:n ominaisarvo* $\iff \det(L - \lambda \,\mathrm{id_V}) = 0$.

Todistus. λ on L:n ominaisarvo $\iff \mathrm{Ker}(L - \lambda \,\mathrm{id_V}) \neq \{\mathbf{0}\} \overset{4.2.8}{\iff} L - \lambda \,\mathrm{id_V}$ ei ole injektio $\overset{4.2.15}{\iff} L - \lambda \,\mathrm{id_V}$ ei ole isomorfismi $\overset{5.2.7}{\iff} \det(L - \lambda \,\mathrm{id_V}) = 0$. $\square$

Tarkastellaan nyt lauseketta

$$p(\lambda) = p_L(\lambda) = \det(L - \lambda\,\mathrm{id}_V), \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Olkoon $S = (\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n)$ jokin V:n kanta ja $M(L; S \leftarrow S) = A = [\,a_{ij}\,] \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Silloin

$$M(L - \lambda\,\mathrm{id}_V; S \leftarrow S) = M(L; S \leftarrow S) - \lambda M(\mathrm{id}_V; S \leftarrow S) = A - \lambda I_n,$$

joten määritelmän 5.2.7 nojalla

$$\text{(6.1.4)} \qquad p_L(\lambda) = \det(A - \lambda I_n) = \begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn}-\lambda \end{vmatrix}.$$

Seuraus 6.1.5. *$p_L(\lambda) = p_A(\lambda)$, kun $A = M(L; S \leftarrow S)$. Erityisesti L:llä ja A:lla on samat ominaisarvot.* $\square$

Lause 6.1.6. *$p_L(\lambda) = \det(L - \lambda\,\mathrm{id}_V)$ on muuttujan $\lambda \in \mathbb{R}$ n-asteinen polynomi $\big(n = \dim(V)\big)$, L:n* karakteristinen polynomi.

Todistus. 6.1.4:ssä $A - \lambda I_n = [\,a_{ij} - \lambda\delta_{ij}\,]$, missä $\delta_{ii} = 1\ \forall i$ ja $\delta_{ij} = 0$, kun $i \neq j$. Niinpä

$$p(\lambda) = \det(A - \lambda I_n) \overset{5.1.6}{=} \sum_{\sigma\in S_n} \epsilon(\sigma)(a_{\sigma(1)1} - \lambda\delta_{\sigma(1)1})\cdot\ldots\cdot(a_{\sigma(n)n} - \lambda\delta_{\sigma(n)n}).$$

Tässä jokainen yhteenlaskettava on λ:n polynomi. Ne yhteenlaskettavat, joissa $\sigma \neq \mathrm{id}$, ovat astetta $< n$ (ainakin yksi $\delta_{\sigma(i)i} = 0$), ja permutaatiota $\sigma = \mathrm{id}$ vastaava yhteenlaskettava on

$$(a_{11} - \lambda)(a_{22} - \lambda)\cdot\ldots\cdot(a_{nn} - \lambda) = (-1)^n\lambda^n + \{\text{alempiasteisia } \lambda\text{:n monomeja}\}. \quad \square$$

Seuraus 6.1.7. a) *Lineaarikuvauksen $L : V \to V$ ominaisarvot ovat L:n karakteristisen polynomin nollakohdat.*

b) *L:llä on korkeintaan $n = \dim(V)$ eri ominaisarvoa.*

Todistus. Jälkimmäinen väite seuraa siitä, että n-asteisella polynomilla on korkeintaan n nollakohtaa. $\square$

Määritelmä 6.1.8. Lineaarikuvaus $L : V \to V$ on *diagonalisoituva*, jos V:llä on sellainen kanta S, että $M(L; S \leftarrow S)$ on lävistäjämatriisi. Neliömatriisi $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ on diagonalisoituva jos vastaava lineaarikuvaus $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ on sitä.

Olkoon $S = (\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n)$ V:n kanta. Tällöin $M(L; S \leftarrow S)$ on lävistäjämatriisi $\iff$ on olemassa luvut $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$, joilla

$$M(L; S \leftarrow S) = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{bmatrix} \quad \text{(voi olla } \lambda_i = \lambda_j \text{ joillakin } i \neq j\text{)}$$

$\iff L(\mathbf{v}_j) = \lambda_j \mathbf{v}_j \ \forall j \iff \mathbf{v}_j$:t ovat L:n ominaisvektoreita.

Tässä λ_j:t ovat L:n ominaisarvoja, ja muita ominaisarvoja L:llä ei ole, koska $p_L(\lambda) = (\lambda_1 - \lambda) \cdot \ldots \cdot (\lambda_n - \lambda) \neq 0$, kun $\lambda \notin \{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$.

Lause 6.1.9. *$A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ on diagonalisoituva $\iff$ on olemassa säännöllinen matriisi $P \in \mathbb{R}^{n\times n}$, jolla $P^{-1}AP$ on lävistäjämatriisi.*

Todistus. " $\Longrightarrow$ ". Jos A on diagonalisoituva, on olemassa $\mathbb{R}^n$:n kanta S, jolla $M(A; S \leftarrow S)$ on lävistäjämatriisi. Lauseiden 2.8.6 ja 4.3.11 mukaan $P = M(E_n \leftarrow S)$ on säännöllinen (E_n on tavalliseen tapaan $\mathbb{R}^n$:n luonnollinen kanta) ja

$$\begin{aligned} P^{-1}AP &= M(S \leftarrow E_n) M(A; E_n \leftarrow E_n) M(E_n \leftarrow S) \\ &= M(A; S \leftarrow S), \quad \text{lävistäjämatriisi.} \end{aligned}$$

" $\Longleftarrow$ ". Olkoon $P = [\,\mathbf{v}_1\ \mathbf{v}_2 \dots \mathbf{v}_n\,] \in \mathbb{R}^{n\times n}$ säännöllinen (P:n sarakkeet $\mathbf{v}_1$, $\dots$, $\mathbf{v}_n$) ja $P^{-1}AP$ lävistäjämatriisi. Silloin $S = (\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n)$ on $\mathbb{R}^n$:n kanta, $P = M(E_n \leftarrow S)$ ja $M(A; S \leftarrow S) = P^{-1}AP$ on lävistäjämatriisi. Siis A on diagonalisoituva. $\square$

Esimerkki 6.1.10. a) Olkoon $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ (so. $A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ on $\sqrt{2}\cdot$ kierto 45° origon ympäri). Tällöin

$$p_A(\lambda) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 \\ 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)^2 + 1 > 0 \quad \forall \lambda \in \mathbb{R},$$

joten A:lla ei ole yhtään ominaisarvoa eikä A ole diagonalisoituva.

b) Olkoon $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$. Silloin $P_A(\lambda) = (2-\lambda)^2 = 0 \iff \lambda = 2$.

Näin ollen $\lambda = 2$ on A:n ainoa ominaisarvo. Etsitään vastaavat ominaisvektorit $\mathbf{x} = [\,x_1\ x_2\,]^T \in \mathbb{R}^2$ (seuraavassa merkitään $V = \mathbb{R}^2$):

$$\mathbf{x} \in V_2 \iff A\mathbf{x} = 2\mathbf{x} \iff \begin{cases} 2x_1 + x_2 = 2x_1 \\ \qquad\ \ 2x_2 = 2x_2 \end{cases} \iff \mathbf{x} = t \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = t\mathbf{e}_1, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Siis $V_2 = \mathrm{span}(\mathbf{e}_1) = x_1$-akseli, ja $\dim(V_2) = 1$. Koska kaikki A:n ominaisvektorit sijaitsevat yksiulotteisessa avaruudessa V_2, A:lla ei voi olla kahta lineaarisesti riippumatonta ominaisvektoria, eikä siis $\mathbb{R}^2$:lla ole sellaista kantaa $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2)$, että $\mathbf{v}_1$ ja $\mathbf{v}_2$ olisivat molemmat A:n ominaisvektoreita. Tämä merkitsee sitä, että A ei ole diagonalisoituva.

c) Olkoon $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$. Silloin

$$\begin{aligned} P_A(\lambda) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 3 & 2-\lambda \end{vmatrix} &= (1-\lambda)(2-\lambda) - 2\cdot 3 \\ &= \lambda^2 - 3\lambda - 4 = 0 \iff \lambda = 4 \text{ tai } \lambda = -1. \end{aligned}$$

Siis A:n ominaisarvot ovat 4 ja -1. Etsimme vastaavat ominaisavaruudet. Olkoon $\mathbf{x} = [\, x_1 \ x_2 \,]^T \in \mathbb{R}^2$.

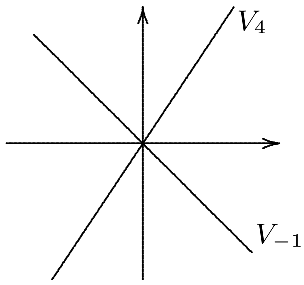
$$\lambda = 4: \quad A\mathbf{x} = 4\mathbf{x} \iff \begin{cases} x_1 + 2x_2 = 4x_1 \\ 3x_1 + 2x_2 = 4x_2 \end{cases} \iff \begin{cases} -3x_1 + 2x_2 = 0 \\ 3x_1 - 2x_2 = 0 \end{cases}$$

$$\iff \mathbf{x} = t\mathbf{v}_1 \ (t \in \mathbb{R}),\ \mathbf{v}_1 = [\,2\ 3\,]^T. \quad \text{Siis} \quad V_4 = \mathrm{span}(\mathbf{v}_1).$$

$$\lambda = -1: \quad A\mathbf{x} = -\mathbf{x} \iff \begin{cases} x_1 + 2x_2 = -x_1 \\ 3x_1 + 2x_2 = -x_2 \end{cases} \iff \begin{cases} 2x_1 + 2x_2 = 0 \\ 3x_1 + 3x_2 = 0 \end{cases}$$

$$\iff \mathbf{x} = t\mathbf{v}_2 \ (t \in \mathbb{R}),\ \mathbf{v}_2 = [\,1\ -1\,]^T. \quad \text{Siis} \quad V_{-1} = \mathrm{span}(\mathbf{v}_2).$$

Nyt $S = (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2)$ on $\mathbb{R}^2$:n kanta, jolla $M(A; S \leftarrow S) = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$, joten A on diagonalisoituva. □



Lause 6.1.11. *Olkoot $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ lineaarikuvauksen $L : V \to V$ eri ominaisarvoja ja $\mathbf{v}_j$ jokin λ_j:hin liittyvä ominaisvektori ($j = 1, \dots, k$). Tällöin jono $(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k)$ on vapaa. Jos L:llä on $n = \dim(V)$ eri ominaisarvoa, niin L on diagonalisoituva.*

Todistus. Induktio k:n suhteen. Tapaus $k = 1$ on selvä ($(\mathbf{v}_1)$ on vapaa, koska $\mathbf{v}_1 \neq \mathbf{0}$).

Olkoon sitten $k \geq 2$. Induktio-oletus: $(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_{k-1})$ on vapaa. On osoitettava, että $(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_{k-1}, \mathbf{v}_k)$ on vapaa.

Olkoot $x_1, \dots, x_k \in \mathbb{R}$ sellaisia, että $x_1\mathbf{v}_1 + \cdots + x_k\mathbf{v}_k = \mathbf{0}$. Silloin

$$\mathbf{0} = \lambda_k(x_1\mathbf{v}_1 + \cdots + x_k\mathbf{v}_k) = (x_1\lambda_k)\mathbf{v}_1 + \cdots + (x_k\lambda_k)\mathbf{v}_k, \quad \text{ja}$$

$$\begin{aligned}\mathbf{0} &= L(x_1\mathbf{v}_1 + \cdots + x_k\mathbf{v}_k) = x_1L(\mathbf{v}_1) + \cdots + x_kL(\mathbf{v}_k) \\ &= (x_1\lambda_1)\mathbf{v}_1 + \cdots + (x_k\lambda_k)\mathbf{v}_k.\end{aligned}$$

Näistä seuraa, että

$$\begin{aligned}\mathbf{0} &= \big((x_1\lambda_1)\mathbf{v}_1 + \cdots + (x_k\lambda_k)\mathbf{v}_k\big) - \big((x_1\lambda_k)\mathbf{v}_1 + \cdots + (x_k\lambda_k)\mathbf{v}_k\big) \\ &= x_1(\lambda_1 - \lambda_k)\mathbf{v}_1 + \cdots + x_{k-1}(\lambda_{k-1} - \lambda_k)\mathbf{v}_{k-1}.\end{aligned}$$

Koska $(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_{k-1})$ on vapaa, on $x_j(\lambda_j - \lambda_k) = 0$, $j = 1, \dots, k-1$; edelleen, koska $\lambda_j - \lambda_k \neq 0$, on $x_j = 0$, $j = 1, \dots, k-1$, ja siten $x_k\mathbf{v}_k = \mathbf{0}$; lopuksi, koska $\mathbf{v}_k \neq \mathbf{0}$, on myös $x_k = 0$. Näin on nähty, että $(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k)$ on vapaa, ja induktiotodistus on valmis.

Viimeinen väite: Jos $k = n = \dim(V)$, on lauseen 2.5.14 a) mukaan vapaa jono $(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k)$ avaruuden V:n kanta. □

Huomautus 6.1.12. L voi tietysti olla diagonalisoituva, vaikka sillä olisi vähemmän kuin $n = \dim(V)$ eri ominaisarvoa.

6.2. Symmetriset lineaarikuvaukset ja matriisit

Olkoon V äärellisulotteinen sisätuloavaruus (sisätulo $\langle\ ,\ \rangle$), $\dim(V) = n \geq 1$.

Määritelmä 6.2.1. Lineaarikuvaus $L : V \to V$ on *symmetrinen* (l. *itseadjungoitu*), jos

$$\langle L(\mathbf{v}), \mathbf{w}\rangle = \langle \mathbf{v}, L(\mathbf{w})\rangle \quad \text{kaikilla } \mathbf{v}, \mathbf{w} \in V.$$

Lause 6.2.2. *Olkoon $L : V \to V$ lineaarikuvaus, $S = (\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n)$ jokin V:n ortonormaali kanta ja $A = M(L; S \leftarrow S) \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Tällöin L on symmetrinen $\iff$ A on symmetrinen matriisi.*

Todistus. Kaikilla $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$ on $\langle L(\mathbf{v}), \mathbf{w}\rangle \overset{3.3.1\,\mathrm{b}}{=} [L(\mathbf{v})]_S \cdot [\mathbf{w}]_S \overset{4.3.3}{=} (A[\mathbf{v}]_S) \cdot [\mathbf{w}]_S$, ja samoin $\langle \mathbf{v}, L(\mathbf{w})\rangle = [\mathbf{v}]_S \cdot (A[\mathbf{w}]_S)$. Koska $\mathbf{v} \mapsto [\mathbf{v}]_S$ on bijektio $V \to \mathbb{R}^n$, on L symmetrinen $\iff$

$$A\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = \mathbf{x} \cdot A\mathbf{y} \quad \forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n.$$

Matriisitulon avulla on $A\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = (A\mathbf{x})^T\mathbf{y} = \mathbf{x}^TA^T\mathbf{y}$ ja $\mathbf{x} \cdot A\mathbf{y} = \mathbf{x}^TA\mathbf{y}$. Siispä L on symmetrinen $\iff$

$$(*) \qquad \mathbf{x}^TA^T\mathbf{y} = \mathbf{x}^TA\mathbf{y} \quad \forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n.$$

Jos $A^T = A$, $(*)$ on selvästi voimassa. Kääntäen, jos $(*)$ on voimassa, niin kaikilla i, j on $\mathbf{e}_i^TA^T\mathbf{e}_j = \mathbf{e}_i^TA\mathbf{e}_j$ eli $A^T(i,j) = A(i,j)$, ja siten $A^T = A$. □

Erityisesti matriisi $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ on symmetrinen $\iff$ lineaarikuvaus $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ on symmetrinen pistetulon suhteen ($A = M(A; E_n \leftarrow E_n)$; $\mathbb{R}^n$:n luonnollinen kanta E_n on ortonormaali pistetulon suhteen).

Lemma 6.2.3. *Olkoon $L : V \to V$ symmetrinen.*

a) *Jos λ_1 ja λ_2 ovat L:n kaksi eri ominaisarvoa ja $\mathbf{v}_i$ jokin λ_i:hin liityvä ominaisvektori ($i = 1, 2$), niin $\mathbf{v}_1 \perp \mathbf{v}_2$.*

b) *Jos $W \subset V$ on L-invariantti aliavaruus, so. $L(W) \subset W$, niin $W^\perp$ on myös L-invariantti, so. $L(W^\perp) \subset W^\perp$.*

Todistus. a) $\lambda_1\langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\rangle = \langle \lambda_1\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\rangle = \langle L(\mathbf{v}_1), \mathbf{v}_2\rangle = \langle \mathbf{v}_1, L(\mathbf{v}_2)\rangle = \langle \mathbf{v}_1, \lambda_2\mathbf{v}_2\rangle = \lambda_2\langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\rangle \implies (\lambda_1 - \lambda_2)\langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\rangle = 0 \implies \langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\rangle = 0$.

b) $\mathbf{v} \in W^\perp \implies \langle \mathbf{v}, \mathbf{w}\rangle = 0 \ \forall \mathbf{w} \in W$

$\implies \langle L(\mathbf{v}), \mathbf{w}\rangle = \langle \mathbf{v}, \underbrace{L(\mathbf{w})}_{\in W}\rangle = 0 \ \forall \mathbf{w} \in W \implies L(\mathbf{v}) \in W^\perp$. $\square$

Seuraavan tuloksen vaikea todistus sivuutetaan:

Lemma 6.2.4. *Jokaisella symmetrisellä matriisilla $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ on (reaalisia) ominaisarvoja.*

Siten myös jokaisella symmetrisellä lineaarikuvauksella $L : V \to V$ (V kuten yllä) on ominaisarvoja (tarkastellaan symmetristä matriisia $A = M(L; S \leftarrow S)$, missä S on jokin V:n ortonormaali kanta).

Lause 6.2.5. *Jos V on äärellisulotteinen sisätuloavaruus ja $L : V \to V$ symmetrinen lineaarikuvaus, niin V:llä on L:n ominaisvektoreista koostuva ortonormaali kanta.*

Todistus. Induktio luvun $n = \dim(V)$ suhteen.

$n = 1$: Valitaan sellainen $\mathbf{u} \in V$, että $\|\mathbf{u}\| = 1$. Tällöin $(\mathbf{u})$ on V:n ortonormaali kanta, ja $L(\mathbf{u}) \in V = \operatorname{span}(\mathbf{u})$, joten $L(\mathbf{u}) = \lambda\mathbf{u}$ eräällä $\lambda \in \mathbb{R}$.

Olkoon sitten $\dim(V) = n \geq 2$ ja $L : V \to V$ symmetrinen. Induktio-oletus: Väite pätee symmetrisillä lineaarikuvauksilla $L' : V' \to V'$ kun $\dim(V') = n - 1$.

Lemman 6.2.4 nojalla L:llä on ominaisarvo $\lambda_1 \in \mathbb{R}$. Olkoon $\mathbf{v}_1 \in V$ jokin λ_1:een liittyvä L:n ominaisvektori, $\mathbf{u}_1 = \mathbf{v}_1/\|\mathbf{v}_1\|$ ja $U = \operatorname{span}(\mathbf{u}_1) \subset V$. Koska $L(U) \subset U$, niin lauseen 6.2.3 b) nojalla $L(U^\perp) \subset U^\perp$, mistä seuraa, että L rajoittuu symmetriseksi lineaarikuvaukseksi $L' : U^\perp \to U^\perp$. Lauseen 3.4.5 c) mukaan on $\dim(U^\perp) = \dim(V) - \dim(U) = n - 1$. Induktio-oletuksesta seuraa, että $U^\perp$:lla on L':n ominaisvektoreista koostuva ortonormaali kanta $(\mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_n)$. Nyt $(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_n)$ on L:n ominaisvektoreista koostuva ortonormaali jono, joka dimensiosyistä on V:n kanta. $\square$

Erityisesti jokainen symmetrinen lineaarikuvaus $L : V \to V$ on diagonalisoituva. Koska ominaisvektoreista koostuva V:n kanta voidaan valita jopa ortonormaaliksi, sanotaan, että L on *ortogonaalisesti diagonalisoituva*.

Olkoon $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ symmetrinen $n \times n$-matriisi. Lauseen 6.2.5 nojalla $\mathbb{R}^n$:llä on sellainen (pistetulon suhteen) ortonormaali kanta $S = (\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n)$, että $\mathbf{u}_j$:t ovat

A:n ominaisvektoreita. Merkitään $P = [\,\mathbf{u}_1 \ldots \mathbf{u}_n\,] \in \mathbb{R}^{n\times n}$ (P:n sarakkeet ovat $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n$). Kuten 6.1.9:ssä, $P^{-1}AP$ on lävistäjämatriisi.

Olkoon välillä $P = [\,\mathbf{u}_1 \ldots \mathbf{u}_n\,] \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mielivaltainen $n \times n$-matriisi. Sarakevektorien jono $(\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n)$ on ortonormaali $\iff$

$$(P^TP)(i,j) = \mathbf{u}_i{}^T\mathbf{u}_j = \mathbf{u}_i \cdot \mathbf{u}_j = \begin{cases} 1, & \text{kun } i = j \\ 0, & \text{kun } i \neq j \end{cases} \iff P^TP = I_n;$$

tällöin lauseen 1.6.6 nojalla P on säännöllinen ja $P^{-1} = P^T$.

Määritelmä 6.2.6. Neliömatriisi $P \in \mathbb{R}^{n\times n}$ on *ortogonaalinen*, jos se on säännöllinen ja $P^{-1} = P^T$.

Seuraus 6.2.7. *Jos $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ on symmetrinen, niin on olemassa sellainen ortogonaalinen matriisi $P \in \mathbb{R}^{n\times n}$, että P^TAP on lävistäjämatriisi.* □

Laskumenetelmä 6.2.8. *Diagonalisoitava ortogonaalisesti annettu symmetrinen matriisi $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, so. etsittävä sellainen ortogonaalinen matriisi $P \in \mathbb{R}^{n\times n}$, että P^TAP on lävistäjämatriisi.*

Ratkaisu. 1. Etsitään kaikki A:n ominaisarvot eli karakteristisen polynomin $p(\lambda) = \det(A - \lambda I_n)$ nollakohdat λ. Tämä voi olla vaikeaa (tai käytännössä mahdotonta).

2. Etsitään jokaiselle ominaisavaruudelle $\mathrm{Null}(A - \lambda I_n)$ jokin kanta, so. ratkaistaan yhtälöryhmät $A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$ (ks. 2.6.9)

3. Sovelletaan Gramin–Schmidtin menetelmää ominaisavaruuksien $\mathrm{Null}(A - \lambda I_n)$ kohdassa 2 löydettyihin kantoihin, tuloksena jokaiselle ominaisavaruudelle ortonormaali kanta. (Jos $\dim \mathrm{Null}(A - \lambda I_n) = 1$, riittää yksi $\mathbf{u}$, jolla $\|\mathbf{u}\| = 1$.)

4. Eri ominaisavaruuksien ortonormaalit kannat yhdessä muodostavat alla olevan lauseen 6.2.9 nojalla $\mathbb{R}^n$:n ortonormaalin kannan $(\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n)$. Tällöin matriisi $P = [\,\mathbf{u}_1 \ldots \mathbf{u}_n\,] \in \mathbb{R}^{n\times n}$ on ortogonaalinen, ja P^TAP on lävistäjämatriisi, jossa lävistäjäalkioina ovat A:n ominaisarvot ominaisvektorien $\mathbf{u}_j$ mukaisessa järjestyksessä. □

Lause 6.2.9. *Olkoon $L : V \to V$ symmetrinen lineaarikuvaus, $\lambda_1, \ldots, \lambda_p \in \mathbb{R}$ L:n eri ominaisarvot, $V_k \subset V$ ominaisarvoon λ_k liittyvä L:n ominaisavaruus ja $(\mathbf{u}_{j_{k-1}+1}, \ldots, \mathbf{u}_{j_k})$ ominaisavaruuden V_k ortonormaali kanta ($k = 1, \ldots, p$); tässä $0 = j_0 < j_1 < \cdots < j_p$. Silloin $S = (\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_{j_p})$ on V:n ortonormaali kanta.*

Todistus. Koska eri ominaisavaruuksien V_k vektorit ovat 6.2.3 a):n mukaan kohtisuorassa toisiaan vastaan, on helppo todeta, että S on ortonormaali jono. Lauseen 3.2.11 nojalla S on vapaa, ja siten sen pituus $j_p \leq n = \dim(V)$.

Toisaalta lauseen 6.2.5 mukaan V:llä on L:n ominaisvektoreista koostuva ortonormaali kanta $S' = (\mathbf{u}'_1 \ldots, \mathbf{u}'_n)$. Olkoon n_k ominaisavaruuteen V_k kuuluvien S':n vektorien lukumäärä ($k = 1, \ldots, p$). Koska jokainen u'_j on johonkin ominaisarvoon liittyvä L:n ominaisvektori, täytyy olla $n_1 + \dots + n_p = n$. Lisäksi tällöin avaruus V_k sisältää n_k-alkioisen vapaan jonon, joten $n_k \le \dim(V_k) = j_k - j_{k-1}$. Tästä seuraa, että

$$n = \sum_{k=1}^{p} n_k \le \sum_{k=1}^{p} (j_k - j_{k-1}) = j_p \le n.$$

Siispä $j_p = n$, ja V:n dimension pituisena vapaana jonona S on V:n kanta. $\square$

Esimerkki 6.2.10. a) $\quad A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}.$

Ominaisarvot:

$$p(\lambda) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & -2 \\ -2 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)^2 - 4 = \lambda^2 - 2\lambda - 3 = 0 \iff \lambda = 3 \text{ tai } \lambda = -1.$$

Ominaisavaruudet: Olkoon $\mathbf{x} = [\, x_1 \; x_2 \,]^T$.

$$(1) \qquad A\mathbf{x} = 3\mathbf{x} \iff \begin{cases} x_1 - 2x_2 = 3x_1 \\ -2x_1 + x_2 = 3x_2 \end{cases} \iff \begin{cases} -2x_1 - 2x_2 = 0 \\ -2x_1 - 2x_2 = 0 \end{cases}$$

$$\iff x_1 + x_2 = 0 \iff \mathbf{x} \in \operatorname{span}\left(\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \right);$$

normitettu ominaisvektori $\mathbf{u}_1 = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$.

$$(2) \qquad A\mathbf{x} = -\mathbf{x} \iff \begin{cases} x_1 - 2x_2 = -x_1 \\ -2x_1 + x_2 = -x_2 \end{cases} \iff \begin{cases} 2x_1 - 2x_2 = 0 \\ -2x_1 + 2x_2 = 0 \end{cases}$$

$$\iff x_1 - x_2 = 0 \iff \mathbf{x} \in \operatorname{span}\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right);$$

normitettu ominaisvektori $\mathbf{u}_2 = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$.

Nyt $(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2)$ on $\mathbb{R}^2$:n ortonormaali kanta, $P = [\, \mathbf{u}_1 \; \mathbf{u}_2 \,] = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$ on ortogonaalinen matriisi, ja

$$P^T A P = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \quad \text{(tarkista laskemalla).} \quad \square$$

b) $\quad A = \begin{bmatrix} -3 & -2 & 4 \\ -2 & 0 & 2 \\ 4 & 2 & -3 \end{bmatrix}.$

Ominaisarvot:

$$p(\lambda) = \begin{vmatrix} -3-\lambda & -2 & 4 \\ -2 & -\lambda & 2 \\ 4 & 2 & -3-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3 - 6\lambda^2 + 15\lambda - 8.$$

Havainto: $p(1) = 0$. Jakamalla jakokulmassa (tai muuten) nähdään, että $p(\lambda) = -(\lambda-1)(\lambda^2 + 7\lambda - 8)$. Edelleen $\lambda^2 + 7\lambda - 8 = 0 \iff \lambda = 1$ tai $\lambda = -8$. Siis $p(\lambda) = 0 \iff \lambda = 1$ tai $\lambda = -8$. Nämä ovat A:n ominaisarvot.

Huomautus. Koska $p(\lambda) = -(\lambda-1)^2(\lambda+8)$, ominaisarvon 1 "algebrallinen kertaluku" on $= 2$

Ominaisavaruudet: Merkitään $V_1 = \mathrm{Null}(A - I_3)$, $V_{-8} = \mathrm{Null}(A + 8I_3)$.

(1) $$A - I_3 = \begin{bmatrix} -4 & -2 & 4 \\ -2 & -1 & 2 \\ 4 & 2 & -4 \end{bmatrix} \rightsquigarrow \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & -1 \\ -2 & -1 & 2 \\ 4 & 2 & -4 \end{bmatrix} \rightsquigarrow \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Siis

$$\mathbf{x} \in V_1 \iff x_1 + \frac{1}{2}x_2 - x_3 = 0 \iff \begin{cases} x_1 = -\frac{1}{2}t_1 + t_2 \\ x_2 = t_1 \in \mathbb{R} \\ x_3 = t_2 \in \mathbb{R} \end{cases}$$

$$\iff \mathbf{x} = t_1\mathbf{w}_1 + t_2\mathbf{w}_2, \quad \mathbf{w}_1 = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & 1 & 0 \end{bmatrix}^T, \quad \mathbf{w}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}^T.$$

$(\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2)$ on V_1:n kanta. Muodostetaan Gramin-Schmidtin menetelmällä V_1:n ortonormaali kanta $(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2)$:

$$\mathbf{v}_1 = 2\mathbf{w}_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_2' = \mathbf{w}_2 - \frac{\mathbf{w}_2 \cdot \mathbf{v}_1}{\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_1}\mathbf{v}_1 = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} 4 \\ 2 \\ 5 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = 5\mathbf{v}_2' = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \\ 5 \end{bmatrix};$$

$$\mathbf{u}_1 = \frac{\mathbf{v}_1}{\|\mathbf{v}_1\|} = \frac{1}{\sqrt{5}}\mathbf{v}_1, \qquad \mathbf{u}_2 = \frac{\mathbf{v}_2}{\|\mathbf{v}_2\|} = \frac{1}{3\sqrt{5}}\mathbf{v}_2.$$

(2) $$A + 8I_3 = \begin{bmatrix} 5 & -2 & 4 \\ -2 & 8 & 2 \\ 4 & 2 & 5 \end{bmatrix} \rightsquigarrow \begin{bmatrix} 1 & -4 & -1 \\ 5 & -2 & 4 \\ 4 & 2 & 5 \end{bmatrix} \rightsquigarrow \begin{bmatrix} 1 & -4 & -1 \\ 0 & 18 & 9 \\ 0 & 18 & 9 \end{bmatrix}$$

$$\rightsquigarrow \begin{bmatrix} 1 & -4 & -1 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix};$$

$$x \in V_{-8} \iff \begin{cases} x_1 - 4x_2 - \phantom{\tfrac{1}{2}}x_3 = 0 \\ x_2 + \tfrac{1}{2}x_3 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x_1 = -t \\ x_2 = -\tfrac{1}{2}t \\ x_3 = t \in \mathbb{R} \end{cases}$$

$$\iff \mathbf{x} = t\mathbf{w}_3, \quad \mathbf{w}_3 = [\,-1 \quad -\tfrac{1}{2} \quad 1\,]^T;$$

normitettu ominaisvektori on $\mathbf{u}_3 = \dfrac{\mathbf{w}_3}{\|\mathbf{w}_3\|} = \dfrac{1}{3}\begin{bmatrix} -2 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$.

Tulos: Haetuksi ortogonaaliseksi matriisiksi P kelpaa

$$P = [\,\mathbf{u}_1\ \mathbf{u}_2\ \mathbf{u}_3\,] = \frac{1}{3\sqrt{5}}\begin{bmatrix} -3 & 4 & -2\sqrt{5} \\ 6 & 2 & -\sqrt{5} \\ 0 & 5 & 2\sqrt{5} \end{bmatrix}, \quad P^T AP = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -8 \end{bmatrix}. \quad \square$$

6.3. Neliömuodon pääakseliesitys

Symmetriseen $n \times n$-matriisiin $A = [\,a_{ij}\,] \in \mathbb{R}^{n\times n}$ liittyvä *neliömuoto* on kaavan

(6.3.1) $$q(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T A\mathbf{x} \quad \text{kaikilla } \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$$

määrittelemä kuvaus $q = q_A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$.

Huomautus 6.3.2. Kun $\mathbf{x} = [\,x_1\ \dots\ x_n\,]^T \in \mathbb{R}^n$, on

$$q(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T A\mathbf{x} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_i x_j = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}x_i^2 + \sum_{1\le i<j\le n} 2a_{ij}x_i x_j,$$

missä jälkimmäinen yhtäsuuruus johtuu siitä, että $a_{ij} = a_{ji}$ kaikilla i, j. Siten q on muuttujien $x_1, \dots, x_n$ homogeeninen 2. asteen polynomi. Kertoimet a_{ij} (ja siis symmetrinen matriisi A) ovat q:n yksikäsitteisesti määräämät.

Seurauksen 6.2.7 nojalla on olemassa ortogonaalinen matriisi $P = [\,\mathbf{u}_1\ \dots\ \mathbf{u}_n\,] \in \mathbb{R}^{n\times n}$ (sarakkeet $\mathbf{u}_j$ muodostavat $\mathbb{R}^n$:n ortonormaalin kannan), jolla $P^T AP$ on lävistäjämatriisi;

$$P^T AP = D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{bmatrix},$$

missä $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ ovat A:n ominaisarvot. Kun $\mathbf{x} = [\,x_1\ \dots\ x_n\,]^T \in \mathbb{R}^n$, merkitään $\mathbf{y} = [\,y_1\ \dots\ y_n\,]^T = P^T\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ eli $\mathbf{x} = P\mathbf{y}$ ($P^T = P^{-1}$); silloin

$$\mathbf{x}^T A\mathbf{x} = (P\mathbf{y})^T A(P\mathbf{y}) = \mathbf{y}^T(P^T AP)\mathbf{y} = \mathbf{y}^T D\mathbf{y} = \lambda_1 y_1^2 + \dots + \lambda_n y_n^2.$$

Siispä

$$q(\mathbf{x}) = \lambda_1 y_1^2 + \cdots + \lambda_n y_n^2, \quad \mathbf{y} = [\, y_1 \ \ldots \ y_n \,]^T = P^T\mathbf{x}.$$

Tämä on neliömuodon q *pääakseliesitys*; q:n *pääakselit* ovat suorat span$(\mathbf{u}_j)$, $j = 1, \ldots, n$, eli uuden $(y_1, \ldots, y_n)$-koordinaatiston koordinaattiakselit.

Huomautus 6.3.5. Jos $P \in \mathbb{R}^{n\times n}$ on ortogonaalinen, on $P^TP = I_n$, joten $1 = \det(I_n) = \det(P^TP) \overset{5.2.2}{=} \det(P^T)\det(P) \overset{5.2.1}{=} \det(P)^2$, mistä seuraa, että $\det(P) = 1$ tai -1. Usein 6.3.4:ssä ortogonaalinen matriisi P halutaan valita niin, että $\det(P) = 1$ (tällöin sanotaan, että $\mathbb{R}^n$:n ortonormaali kanta $(\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n)$ on *positiivisesti suunnistettu*). Tähän päästään vaihtamalla tarvittaessa P:n yhden sarakkeen merkki.

Esimerkki 6.3.6. Olkoon $q(\mathbf{x}) = -3x_1^2 - 3x_3^2 - 4x_1x_2 + 8x_1x_3 + 4x_2x_3$, kun $\mathbf{x} = [\, x_1 \ x_2 \ x_3 \,]^T \in \mathbb{R}^3$. Vastaava symmetrinen matriisi on

$$A = \begin{bmatrix} -3 & -2 & 4 \\ -2 & 0 & 2 \\ 4 & 2 & -3 \end{bmatrix}.$$

(A:ta muodostettaessa on huomattava, että $a_{ij} = a_{ji} = \frac{1}{2} \cdot (x_ix_j$:n kerroin), kun $i \neq j$.) Esimerkin 6.2.10 b) nojalla on

$$P^TAP = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -8 \end{bmatrix}, \quad \text{kun} \quad P = \frac{1}{3\sqrt{5}} \begin{bmatrix} -3 & 4 & -2\sqrt{5} \\ 6 & 2 & -\sqrt{5} \\ 0 & 5 & 2\sqrt{5} \end{bmatrix},$$

missä P on ortogonaalinen. Neliömuodon q pääakselit ovat P:n sarakkeiden eli vektorien

$$\mathbf{u}_1 = \frac{1}{\sqrt{5}} [\, -1 \quad 2 \quad 0 \,]^T, \quad \mathbf{u}_2 = \frac{1}{3\sqrt{5}} [\, 4 \quad 2 \quad 5 \,]^T \quad \text{ja} \quad \mathbf{u}_3 = \frac{1}{3} [\, -2 \quad -1 \quad 2 \,]^T$$

suuntaiset. Tässä $\det(P) = -1$, joten ortonormaali kanta $(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3)$ ei ole positiivisesti suunnistettu. Kun $\mathbf{y} = [\, y_1 \ y_2 \ y_3 \,]^T = P^T\mathbf{x}$ eli $\mathbf{x} = P\mathbf{y} = y_1\mathbf{u}_1 + y_2\mathbf{u}_2 + y_3\mathbf{u}_3$, on

$$q(\mathbf{x}) = y_1^2 + y_2^2 - 8y_3^2.$$

Toisen asteen käyrät $\mathbb{R}^2$:ssa.

Kun $\mathbf{x} = [\, x_1 \ x_2 \,]^T \in \mathbb{R}^2$, olkoon

$$f(\mathbf{x}) = a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + 2a_{12}x_1x_2 + b_1x_1 + b_2x_2 + c = \mathbf{x}^TA\mathbf{x} + B\mathbf{x} + c,$$

missä $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ on symmetrinen $(a_{12} = a_{21})$, $A \neq \mathbf{0}$, $B = [\, b_1 \ b_2 \,] \in \mathbb{R}^{1\times 2}$ ja $c \in \mathbb{R}$.

Tehtävä 6.3.7. *Selvitettävä millainen on $\mathbb{R}^2$:n osajoukko*

$$X = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 \mid f(\mathbf{x}) = 0\}.$$

Seurauksen 6.2.7 ja huomautuksen 6.3.5 nojalla on olemassa ortogonaalinen $P = [\, u_{ij} \,] = [\, \mathbf{u}_1 \; \mathbf{u}_2 \,] \in \mathbb{R}^{2\times 2}$, jolla $\det(P) = 1$ ja

$$D = P^T AP = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix},$$

missä λ_1 ja λ_2 ovat A:n ominaisarvot.

Huomautus 6.3.8. Koska $\|\mathbf{u}_1\| = 1$, on $u_{11}^2 + u_{21}^2 = 1$, joten $u_{11} = \cos\varphi$ ja $u_{21} = \sin\varphi$ eräällä $\varphi \in [0, 2\pi[$. Edelleen ehdoista $\mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{u}_2 = 0$ ja $\det(P) = 1$ saadaan yhtälöt $u_{11}u_{12} + u_{21}u_{22} = 0$ ja $u_{11}u_{22} - u_{21}u_{12} = 1$. Yhtälöparista

$$\begin{cases} \cos\varphi \cdot u_{12} + \sin\varphi \cdot u_{22} = 0 \\ -\sin\varphi \cdot u_{12} + \cos\varphi \cdot u_{22} = 1 \end{cases}$$

saadaan $u_{12} = -\sin\varphi$ ja $u_{22} = \cos\varphi$. Siispä

$$P = \begin{bmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{bmatrix} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$$

on kierto kulman φ verran origon ympäri (vrt. 4.1.3 d). Kääntäen, jokainen tällainen P on ortogonaalinen ja $\det(P) = 1$. $\square$

Merkitään $\mathbf{x} = P\mathbf{y}$ eli $\mathbf{y} = [\, y_1 \; y_2 \,]^T = P^T\mathbf{x}$. Tällöin siis

$$\begin{cases} x_1 = \cos\varphi \cdot y_1 - \sin\varphi \cdot y_2 \\ x_2 = \sin\varphi \cdot y_1 + \cos\varphi \cdot y_2. \end{cases}$$

Koska $\mathbf{u}_i = P\mathbf{e}_i$, saadaan y_i-akseli $\mathrm{span}(\mathbf{u}_i)$ kiertämällä x_i-akselia $\mathrm{span}(\mathbf{e}_i)$ kulman φ verran origon ympäri. Nyt

$$\begin{aligned} f(\mathbf{x}) &= \mathbf{x}^T A\mathbf{x} + B\mathbf{x} + c = (P\mathbf{y})^T A(P\mathbf{y}) + B(P\mathbf{y}) + c \\ &= \mathbf{y}^T(P^T AP)\mathbf{y} + (BP)\mathbf{y} + c = \mathbf{y}^T D\mathbf{y} + (BP)\mathbf{y} + c \\ &= \lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + b_1' y_1 + b_2' y_2 + c, \end{aligned}$$

missä $[\, b_1' \; b_2' \,] = BP$. Näin ollen $f(\mathbf{x}) = 0 \iff$

(6.3.9) $$\lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + b_1' y_1 + b_2' y_2 + c = 0, \quad \mathbf{x} = P\mathbf{y}.$$

Koska $A \neq 0$, ainakin toinen ominaisarvoista λ_1, λ_2 on $\neq 0$. Jaetaan käsittely useisiin tapauksiin:

I. $\underline{\lambda_1 \neq 0 \neq \lambda_2}$ (ts. A on säännöllinen).

Neliöiksi täydentämällä päästään 6.3.9:ssä eroon 1. asteen termeistä: (6.3.9) $\iff$

$$\lambda_1 z_1^2 + \lambda_2 z_2^2 = d, \quad z_i = y_i + \frac{b_i'}{2\lambda_i} \ (i = 1, 2), \quad d = \frac{{b_1'}^2}{4\lambda_1} + \frac{{b_2'}^2}{4\lambda_2} - c. \tag{6.3.10}$$

Edellä suoritetun koordinaatiston kierron jälkeen on siis vielä tehty origon siirto: (z_1, z_2)-koordinaatiston origo sijaitsee (y_1, y_2)-koordinaatiston pisteessä $\mathbf{y}_0 = (-b_1'/2\lambda_1, -b_2'/2\lambda_2)$ eli alkuperäisen (x_1, x_2)-koordinaatiston pisteessä $\mathbf{x}_0 = P\mathbf{y}_0$.

I.1 $\underline{d = 0}$.

– Jos λ_1 ja λ_2 ovat samanmerkkiset, niin (6.3.10) $\iff$ $z_1 = z_2 = 0$. Tällöin $X = \{\mathbf{x}_0\}$ on piste.

– Oletetaan sitten, että λ_1 ja λ_2 ovat erimerkkiset, esimerkiksi $\lambda_1 > 0$ ja $\lambda_2 < 0$. Tässä tapauksessa

$$\begin{aligned}
(6.3.10) &\iff (\lambda_1' z_1)^2 - (\lambda_2' z_2)^2 = 0 \quad \left(\lambda_1' = \sqrt{\lambda_1},\ \lambda_2' = \sqrt{-\lambda_2}\right) \\
&\iff (\lambda_1' z_1 - \lambda_2' z_2)(\lambda_1' z_1 + \lambda_2' z_2) = 0 \\
&\iff \lambda_1' z_1 = \lambda_2' z_2 \quad \text{tai} \quad \lambda_1' z_1 = -\lambda_2' z_2.
\end{aligned}$$

Siis X on kahden $\mathbf{x}_0$:n kautta kulkevan suoran yhdiste.

I.2 $\underline{d \neq 0}$. Tällöin (6.3.10) $\iff$ $\lambda_1' z_1^2 + \lambda_2' z_2^2 = 1$, missä $\lambda_i' = \dfrac{\lambda_i}{d}$ $(i = 1, 2)$.

– Oletetaan, että $\lambda_1' > 0$ ja $\lambda_2' > 0$. Merkitsemällä $\mu_i = 1/\sqrt{\lambda_i'}$, $(i = 1, 2)$, saadaan

$$(6.3.10) \iff \frac{z_1^2}{\mu_1^2} + \frac{z_2^2}{\mu_2^2} = 1,$$

joten X on *ellipsi*.

– Oletetaan, että λ_1' ja λ_2' ovat erimerkkiset, esimerkiksi $\lambda_1' > 0$ ja $\lambda_2' < 0$. Merkitsemällä $\mu_1 = 1/\sqrt{\lambda_1'}$ ja $\mu_2 = 1/\sqrt{-\lambda_2'}$ saadaan tällä kertaa

$$(6.3.10) \iff \frac{z_1^2}{\mu_1^2} - \frac{z_2^2}{\mu_2^2} = 1,$$

joten X on *hyperbeli*.

– Oletetaan, että $\lambda_1' < 0$ ja $\lambda_2' < 0$. Tällöin yhtälön $\lambda_1' z_1^2 + \lambda_2' z_2^2 = 1$ vasen puoli on ≤ 0 ja oikea puoli $= 1 > 0$, joten ei ole ratkaisua (z_1, z_2), ja $X = \emptyset$.

II. $\underline{\lambda_1 \neq 0 = \lambda_2}$ (vastaavasti käsiteltäisiin tapaus $\lambda_1 = 0 \neq \lambda_2$).

Suoritetaan taas origon siirto: (6.3.9) $\iff$

$$\lambda_1 z_1^2 + b_2' z_2 = d, \quad z_1 = y_1 + \frac{b_1'}{2\lambda_1}, \quad z_2 = y_2, \quad d = \frac{{b_1'}^2}{4\lambda_1} - c\,; \tag{6.3.11}$$

(z_1, z_2)-koordinaatiston origo on (y_1, y_2)-koordinaatiston pisteessä $(-b_1'/2\lambda_1, 0)$.

II.1 $\underline{b_2' = 0}$. (6.3.11) $\iff$ $\lambda_1 z_1^2 = d$.

II.1.1 $\underline{d = 0}$. (6.3.11) $\iff$ $z_1 = 0$. Siis X on z_2-akseli.

II.1.2 $\underline{d \neq 0}$.

– Oletetaan, että $\lambda_1 d > 0$. Tällöin (6.3.11) $\iff$ $z_1 = \pm\sqrt{d/\lambda_1}$, joten X on kahden yhdensuuntaisen suoran yhdiste.

– Oletetaan, että $\lambda_1 d < 0$. Tällöin (6.3.11) $\iff$ $(\lambda_1/d)z_1^2 = 1$, joten $X = \emptyset$.

II.2 $\underline{b_2' \neq 0}$.

$$(6.3.11) \iff z_2 = -\frac{\lambda_1}{b_2'} z_1^2 + \frac{d}{b_2'}.$$

Siispä X on *paraabeli*, jonka akseli on z_2-akseli ja huippu on (z_1, z_2)-koordinaatiston pisteessä $(0, d/b_2')$.

Esimerkki 6.3.12. $(*)$ $x_1^2 + x_2^2 - 4x_1x_2 = 9$.

Neliömuotoa vastaava symmetrinen matriisi on $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$.

$$6.2.10 \text{ a)} \implies P^T A P = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad P = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix};$$

P on ortogonaalinen ja $\det(P) = 1$ (kierto $45°$ origon ympäri myötäpäivään). Merkitään $\mathbf{x} = P\mathbf{y}$ eli

$$\begin{cases} x_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(y_1 + y_2) \\ x_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(-y_1 + y_2). \end{cases}$$

Tällöin

$$(*) \iff 3y_1^2 - y_2^2 = 9 \iff \frac{y_1^2}{3} - \frac{y_2^2}{9} = 1.$$

Kyseessä on hyperbeli, jonka pääakselit ovat vektorien $\frac{1}{\sqrt{2}}[1\ -1]^T$ ja $\frac{1}{\sqrt{2}}[1\ 1]^T$ suuntaiset.

Esimerkki 6.3.13. $(*)\quad x_1^2 + 3x_2^2 + 2\sqrt{3}x_1x_2 + 4\sqrt{3}x_1 - 4x_2 + 4 = 0.$

Neliömuotoa vastaava symmetrinen matriisi on $A = \begin{bmatrix} 1 & \sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 3 \end{bmatrix}.$

A:n ominaisarvot: $\begin{vmatrix} 1-\lambda & \sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 2-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 4\lambda = 0 \iff \lambda = 4$ tai $\lambda = 0.$

Ominaisvektorit:

$$A\mathbf{x} = 4\mathbf{x} \iff \begin{cases} -3x_1 + \sqrt{3}x_2 = 0 \\ \sqrt{3}x_1 - x_2 = 0 \end{cases} \iff x_2 = \sqrt{3}x_1;$$

normitettu ominaisvektori $\mathbf{u}_1 = \frac{1}{2}\,[\,1\ \sqrt{3}\,]^T.$

$$A\mathbf{x} = 0 \iff \begin{cases} x_1 + \sqrt{3}x_2 = 0 \\ \sqrt{3}x_1 + 3x_2 = 0 \end{cases} \iff x_1 = -\sqrt{3}x_2;$$

normitettu ominaisvektori $\mathbf{u}_2 = \frac{1}{2}\,[\,-\sqrt{3}\ 1\,]^T.$

Koordinaatiston kierto:

$$\mathbf{x} = P\mathbf{y}, \qquad P = [\,\mathbf{u}_1\ \mathbf{u}_2\,] = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & -\sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 1 \end{bmatrix}, \qquad \text{eli} \quad \begin{cases} x_1 = \frac{1}{2}(y_1 - \sqrt{3}y_2) \\ x_2 = \frac{1}{2}(\sqrt{3}y_1 + y_2). \end{cases}$$

(P on ortogonaalinen ja $\det(P) = 1$.)

Sijoitetaan:

$$(*) \iff 4y_1^2 - 8y_2 + 4 = 0 \iff y_2 = \frac{1}{2}y_1^2 + \frac{1}{2}.$$

Kyseessä on paraabeli, jonka akseli on $\mathbf{u}_2$:n eli y_2-akselin suuntainen ja huippu (y_1, y_2)-koordinaatiston pisteessä $(0, \frac{1}{2})$.

Esimerkki 6.3.14. $(*)\quad 5x_1^2 + 5x_2^2 - 8x_1x_2 - 18x_1 + 18x_2 + 8 = 0.$

Neliömuotoa vastaava symmetrinen matriisi on $A = \begin{bmatrix} 5 & -4 \\ -4 & 5 \end{bmatrix}.$

A:n ominaisarvot: $\begin{vmatrix} 5-\lambda & -4 \\ -4 & 5-\lambda \end{vmatrix} = (5-\lambda)^2 - 16 = 0 \iff \lambda = 1$ tai $\lambda = 9.$

Ominaisvektorit:

$$A\mathbf{x} = \mathbf{x} \iff \begin{cases} 4x_1 - 4x_2 = 0 \\ -4x_1 + 4x_2 = 0 \end{cases} \iff x_1 = x_2;$$

normitettu ominaisvektori $\mathbf{u}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\,[\,1\ 1\,]^T.$

$$A\mathbf{x} = 9\mathbf{x} \iff \begin{cases} -4x_1 - 4x_2 = 0 \\ -4x_1 - 4x_2 = 0 \end{cases} \iff x_1 = -x_2;$$

normitettu ominaisvektori $\mathbf{u}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}[-1\ 1]^T$.

$$P^T AP = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 9 \end{bmatrix}, \quad \text{kun} \quad P = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \text{kierto } 45^\circ \text{ origon ympäri vastapäivään.}$$

Sijoitetaan $(*)$:ssä $\quad \mathbf{x} = P\mathbf{y} \quad$ eli $\begin{cases} x_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(y_1 - y_2) \\ x_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(y_1 + y_2) \end{cases}$:

$$\begin{aligned}
(*) &\iff y_1^2 + 9y_2^2 - 9\sqrt{2}(y_1 - y_2) + 9\sqrt{2}(y_1 + y_2) + 8 = 0 \\
&\iff y_1^2 + 9(y_2^2 + 2\sqrt{2}y_2) + 8 = 0 \\
&\iff y_1^2 + 9(y_2 + \sqrt{2})^2 = 10 \\
&\iff \frac{y_1^2}{(\sqrt{10})^2} + \frac{(y_2 + \sqrt{2})^2}{(\sqrt{10}/3)^2} = 1.
\end{aligned}$$

Kyseessä on ellipsi, jonka keskipiste on (y_1, y_2)-koordinaatiston piste $(0, -\sqrt{2})$.