3. SISÄTULOAVARUUDET

3.1 Pistetulo $\mathbb{R}^n$:ssä

Määritelmä 3.1.1. Vektorien $\mathbf{x} = [\,x_1\ x_2\ \dots\ x_n\,]^T \in \mathbb{R}^n$ ja $\mathbf{y} = [\,y_1\ y_2\ \dots\ y_n\,]^T \in \mathbb{R}^n$ *pistetulo* on reaaliluku

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = \sum_{k=1}^{n} x_k y_k = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \cdots + x_n y_n \in \mathbb{R}.$$

Huomautus 3.1.2. Jos jokaisella $a \in \mathbb{R}$ samastetaan luku a ja 1×1-matriisi $[\,a\,] \in \mathbb{R}^{1\times 1}$, voidaan pistetulo $\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}$ esittää matriisitulona:

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = x_1 y_1 + \cdots + x_n y_n = [\,x_1\ x_2\ \dots\ x_n\,] \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} = \mathbf{x}^T \mathbf{y}.$$

Lause 3.1.3. *$\mathbb{R}^n$:n pistetulolla on seuraavat ominaisuudet:*

i) $\mathbf{x} \cdot \mathbf{x} \geq 0$ *kaikilla* $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$*;* $\mathbf{x} \cdot \mathbf{x} = 0$ *vain, kun* $\mathbf{x} = \mathbf{0}$.

ii) $\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = \mathbf{y} \cdot \mathbf{x}$ *kaikilla* $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$.

iii) $(\mathbf{x} + \mathbf{x}') \cdot \mathbf{y} = \mathbf{x} \cdot \mathbf{y} + \mathbf{x}' \cdot \mathbf{y}$ *kaikilla* $\mathbf{x}, \mathbf{x}', \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$.

iv) $(c\mathbf{x}) \cdot \mathbf{y} = c(\mathbf{x} \cdot \mathbf{y})$ *kaikilla* $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$, $c \in \mathbb{R}$.

Todistus. i) Olkoon $\mathbf{x} = [\,x_1\ x_2\ \dots\ x_n\,]^T \in \mathbb{R}^n$. Koska $x_k^2 \geq 0$ kaikilla k, on

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{x} = x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 \geq 0.$$

Jos $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$, ainakin yksi koordinaatti $x_{k_0} \neq 0$, jolloin $\mathbf{x} \cdot \mathbf{x} \geq x_{k_0}^2 > 0$.
ii)–iv) ovat suoria laskuja. $\square$

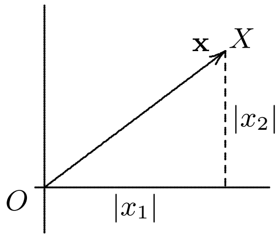
Lauseen 3.1.3 i) nojalla voidaan kaikilla $\mathbf{x} = [\,x_1\ x_2\ \dots\ x_n\,]^T \in \mathbb{R}^n$ määritellä

$$\|\mathbf{x}\| = \sqrt{\mathbf{x} \cdot \mathbf{x}} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2} \geq 0,$$

vektorin $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ *normi*. Jos $n = 1$ ja $\mathbf{x} = x \in \mathbb{R}$ $(= \mathbb{R}^1$, ks. yllä), on erityisesti $\|x\| = \sqrt{x^2} = |x|$, reaaliluvun x:n itseisarvo.

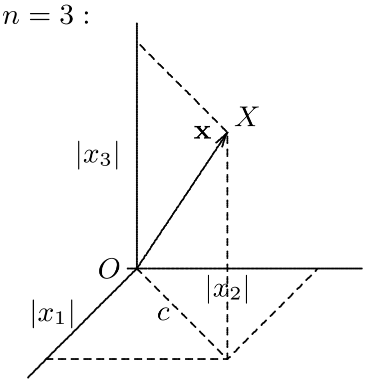
Geometrinen tulkinta $\mathbb{R}^2$:ssa ja $\mathbb{R}^3$:ssa. Olkoon $n = 2$ tai 3, ja $\mathbf{x} = \overrightarrow{OX} \in \mathbb{R}^n$. Pythagoraan lauseen nojalla normi $\|\mathbf{x}\|$ on pisteen X (tavanomainen) etäisyys origosta O. Siten normia $\|\mathbf{x}\|$ voidaan kutsua vektorin $\mathbf{x}$ *pituudeksi.*

$n = 2:$



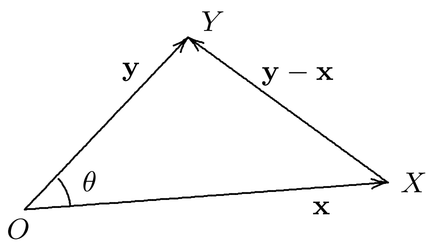
$$|OX| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2} = \|\mathbf{x}\|$$

$n = 3:$



$$\begin{aligned} |OX| &= \sqrt{c^2 + x_3^2} = \sqrt{(x_1^2 + x_2^2) + x_3^2} \\ &= \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2} = \|\mathbf{x}\| \end{aligned}$$

Olkoot $X, Y \in \mathbb{R}^n$, $X \neq O \neq Y$, ja $\mathbf{x} = \overrightarrow{OX}$, $\mathbf{y} = \overrightarrow{OY}$, jolloin $\overrightarrow{XY} = \mathbf{y} - \mathbf{x}$ ja $|XY| = \|\mathbf{y} - \mathbf{x}\|$ on pisteiden X ja Y (tavanomainen) etäisyys. Olkoon $\theta \in [0, \pi]$ vektorien $\mathbf{x}$ ja $\mathbf{y}$ välinen kulma (kun vektorien ajatellaan alkavan samasta pisteestä).



Tasogeometrian kosinilauseen nojalla on

$$\begin{aligned} &|XY|^2 = |OX|^2 + |OY|^2 - 2|OX||OY|\cos\theta, \quad \text{eli} \\ &\|\mathbf{y} - \mathbf{x}\|^2 = \|\mathbf{x}\|^2 + \|\mathbf{y}\|^2 - 2\|\mathbf{x}\|\|\mathbf{y}\|\cos\theta. \end{aligned}$$

Toisaalta

$$\begin{aligned} \|\mathbf{y} - \mathbf{x}\|^2 &= (\mathbf{y} - \mathbf{x}) \cdot (\mathbf{y} - \mathbf{x}) = \mathbf{y} \cdot (\mathbf{y} - \mathbf{x}) - \mathbf{x} \cdot (\mathbf{y} - \mathbf{x}) \\ &= \mathbf{y} \cdot \mathbf{y} - \mathbf{y} \cdot \mathbf{x} - \mathbf{x} \cdot \mathbf{y} + \mathbf{x} \cdot \mathbf{x} = \|\mathbf{x}\|^2 + \|\mathbf{y}\|^2 - 2(\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}); \end{aligned}$$

siis

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = \|\mathbf{x}\| \, \|\mathbf{y}\| \, \cos\theta.$$

Esimerkki 3.1.4. Olkoon $\mathbf{x} = [\,1 \quad 1 \quad 0\,]^T \in \mathbb{R}^3$ ja $\mathbf{y} = [\,0 \quad 1 \quad 1\,]^T \in \mathbb{R}^3$. Tällöin

$$\begin{aligned}
&\|\mathbf{x}\| = \sqrt{1^2 + 1^2 + 0^2} = \sqrt{2}, \quad \|\mathbf{y}\| = \sqrt{0^2 + 1^2 + 1^2} = \sqrt{2},\\
&\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| = \|\,[\,1 \quad 0 \quad -1\,]^T\,\| = \sqrt{1^2 + 0^2 + (-1)^2} = \sqrt{2},\\
&\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = 1 \cdot 0 + 1 \cdot 1 + 0 \cdot 1 = 1.
\end{aligned}$$

Merkitään θ:lla $\mathbf{x}$:n ja $\mathbf{y}$:n välistä kulmaa. Tällöin

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = \|\mathbf{x}\|\,\|\mathbf{y}\| \cos\theta \implies \cos\theta = \frac{\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}}{\|\mathbf{x}\|\,\|\mathbf{y}\|} = \frac{1}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}} = \frac{1}{2} \implies \theta = \frac{\pi}{3}.$$

3.2 Sisätulot

Olkoon V vektoriavaruus.

Määritelmä 3.2.1. V:ssä on annettu *sisätulo* s, jos jokaiseen pariin $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$ liittyy tietty luku $s(\mathbf{v}, \mathbf{w}) \in \mathbb{R}$ (siis s on kuvaus $V \times V \to \mathbb{R}$) niin, että

i) $s(\mathbf{v}, \mathbf{v}) \geq 0$ kaikilla $\mathbf{v} \in V$; $s(\mathbf{v}, \mathbf{v}) = 0$ vain kun $\mathbf{v} = \mathbf{0}$,

ii) $s(\mathbf{v}, \mathbf{w}) = s(\mathbf{w}, \mathbf{v})$ kaikilla $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$,

iii) $s(\mathbf{v} + \mathbf{v}', \mathbf{w}) = s(\mathbf{v}, \mathbf{w}) + s(\mathbf{v}', \mathbf{w})$ kaikilla $\mathbf{v}, \mathbf{v}', \mathbf{w} \in V$, ja

iv) $s(c\mathbf{v}, \mathbf{w}) = cs(\mathbf{v}, \mathbf{w})$ kaikilla $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$, $c \in \mathbb{R}$.

V varustettuna tietyllä sisätulollaan s (eli pari (V, s)) on *sisätuloavaruus*.

Huomautus 3.2.2. Sisätuloavaruudessa (V, s) on tapana merkitä (esimerkiksi) $s(\mathbf{v}, \mathbf{w}) = \langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle$. Määritelmän 3.2.1 nojalla saadaan seuraavat kaavat, joissa $\mathbf{v}$, $\mathbf{v}'$, $\mathbf{w}$, $\mathbf{w}' \in V$, $c \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned}
\langle \mathbf{v} + \mathbf{v}', \mathbf{w} \rangle &= \langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle + \langle \mathbf{v}', \mathbf{w} \rangle && \text{(3.2.1 iii)}\\
\langle c\mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle &= c\langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle && \text{(3.2.1 iv)}\\
\langle \mathbf{v}, \mathbf{w} + \mathbf{w}' \rangle &= \langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle + \langle \mathbf{v}, \mathbf{w}' \rangle && \text{(3.2.1 ii ja iii)}\\
\langle \mathbf{v}, c\mathbf{w} \rangle &= c\langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle && \text{(3.2.1 ii ja iv)}\\
\langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle &= \langle \mathbf{w}, \mathbf{v} \rangle && \text{(3.2.1 ii)}\\
\langle \mathbf{0}, \mathbf{w} \rangle &= \langle \mathbf{v}, \mathbf{0} \rangle = 0 && \text{(todistus alla)}\\
\langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle &= 0, \quad \text{kun } \mathbf{v} = \mathbf{0} && \text{(3.2.1 i)}\\
\langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle &> 0, \quad \text{kun } \mathbf{v} \neq \mathbf{0} && \text{(3.2.1 i).}
\end{aligned}$$

(Kolmanneksi alimman kohdan todistus:

$$\langle \mathbf{0}, \mathbf{w} \rangle = \langle \mathbf{0} + \mathbf{0}, \mathbf{w} \rangle \overset{\text{iii}}{=} \langle \mathbf{0}, \mathbf{w} \rangle + \langle \mathbf{0}, \mathbf{w} \rangle = 2 \cdot \langle \mathbf{0}, \mathbf{w} \rangle$$

$$\implies \langle \mathbf{0}, \mathbf{w} \rangle = 0; \quad \langle \mathbf{v}, \mathbf{0} \rangle \overset{\text{ii}}{=} \langle \mathbf{0}, \mathbf{v} \rangle = 0.)$$

Esimerkki 3.2.3. a) $\mathbb{R}^n$:n pistetulo on sisätulo (3.1.3). Ellei toisin mainita, $\mathbb{R}^n$ tai sen aliavaruus varustetaan aina tällä sisätulolla.

b) Vastaavasti $\mathbb{R}_n$:ssä voidaan määritellä pistetulo

$$[\, x_1 \ x_2 \ \dots \ x_n \,] \cdot [\, y_1 \ y_2 \ \dots \ y_n \,] = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \cdots + x_n y_n,$$

joka on sisätulo.

c) Kun $\mathbf{x} = [\, x_1 \ x_2 \,]^T \in \mathbb{R}^2$ ja $\mathbf{y} = [\, y_1 \ y_2 \,]^T \in \mathbb{R}^2$, olkoon

$$s(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = x_1 y_1 - x_2 y_1 - x_1 y_2 + 3x_2 y_2.$$

Näin määritelty s on sisätulo $\mathbb{R}^2$:ssa: 3.2.1 ii)–iv) todetaan suoralla laskulla, ja i) seuraavasti:

$$\begin{aligned} s(\mathbf{x}, \mathbf{x}) &= x_1^2 - 2x_1 x_2 + 3x_2^2 = (x_1 - x_2)^2 + 2x_2^2 \geq 0; \\ s(\mathbf{x}, \mathbf{x}) &= 0 \implies x_1 - x_2 = 0 = x_2 \implies \mathbf{x} = \mathbf{0}. \end{aligned}$$

(Ei-negatiivisten lukujen summa on nolla vain, kun jokainen yhteenlaskettava on nolla.)

d) Kun $f, g \in C^0([0,1], \mathbb{R}) = \{f \mid f : [0,1] \to \mathbb{R} \text{ jatkuva}\}$, määritellään

$$\langle f, g \rangle = \int_0^1 f(t) g(t) dt \in \mathbb{R}.$$

Näin saadaan sisätulo avaruudessa $C^0([0,1], \mathbb{R})$.

e) Reaalikertoimisten polynomien avaruuteen P saadaan eräs sisätulo kaavalla

$$\langle f, g \rangle = \int_0^1 f(t) g(t) dt \quad (f, g \in P).$$

Olkoon V sisätuloavaruus (sisätuloa merkitään $\langle \ , \ \rangle$). Kuten $\mathbb{R}^n$:ssä, sanomme, että vektorin $\mathbf{v} \in V$ *normi* (eli *pituus*) on

$$\|\mathbf{v}\| = \sqrt{\langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle} \geq 0.$$

(Yleisessä tapauksessa tällä käsitteellä ei tietenkään ole varsinaista geometrista sisältöä.)

Lause 3.2.4. *(Schwarzin epäyhtälö) Kaikilla* $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$ *on*

$$|\langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle| \leq \|\mathbf{v}\| \|\mathbf{w}\|.$$

Todistus. Väite pätee, jos $\mathbf{w} = \mathbf{0}$ (molemmat puolet $= 0$). Siis voidaan olettaa, että $\mathbf{w} \neq \mathbf{0}$, jolloin $\|\mathbf{w}\|^2 = \langle \mathbf{w}, \mathbf{w} \rangle > 0$. Kaikilla $t \in \mathbb{R}$ on

$$\begin{aligned} 0 &\leq \langle \mathbf{v} + t\mathbf{w}, \mathbf{v} + t\mathbf{w} \rangle \quad (3.3.\mathrm{i}) \\ &= \langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle + t\langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle + t\langle \mathbf{w}, \mathbf{v} \rangle + t^2 \langle \mathbf{w}, \mathbf{w} \rangle \\ &= \|\mathbf{v}\|^2 + 2\langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle t + \|\mathbf{w}\|^2 t^2. \end{aligned}$$

Sijoitetaan erityisesti $t = -\langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle / \|\mathbf{w}\|^2$ (yllä oleva t:n 2. asteen polynomi saa tällä t:n arvolla pienimmän arvonsa):

$$0 \leq \|\mathbf{v}\|^2 - 2\langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle \cdot \frac{\langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle}{\|\mathbf{w}\|^2} + \|\mathbf{w}\|^2 \cdot \frac{\langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle^2}{\|\mathbf{w}\|^4} = \|\mathbf{v}\|^2 - \frac{\langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle^2}{\|\mathbf{w}\|^2}.$$

Tästä seuraa, että $\langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle^2 \leq \|\mathbf{v}\|^2 \|\mathbf{w}\|^2$. $\square$

$\mathbb{R}^n$:n pistetulolla Schwarzin epäyhtälö on nimeltään *Cauchyn epäyhtälö*

$$|x_1 y_1 + \cdots + x_n y_n| \leq \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2} \sqrt{y_1^2 + \cdots + y_n^2}, \tag{3.2.5}$$

missä $x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n \in \mathbb{R}$.

Lause 3.2.6. *Normin ominaisuuksia: Olkoot* $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$ *ja* $c \in \mathbb{R}$. *Tällöin*

i) $\|\mathbf{v}\| \geq 0$; $\|\mathbf{v}\| = 0 \iff \mathbf{v} = \mathbf{0}$.

ii) $\|\mathbf{v} + \mathbf{w}\| \leq \|\mathbf{v}\| + \|\mathbf{w}\|$ *("kolmioepäyhtälö").*

iii) $\|c\mathbf{v}\| = |c| \, \|\mathbf{v}\|$.

Todistus. i) seuraa 3.2.1 i):stä.

ii) Schwarzin epäyhtälön avulla saadaan

$$\begin{aligned} \|\mathbf{v} + \mathbf{w}\|^2 &= \langle \mathbf{v} + \mathbf{w}, \mathbf{v} + \mathbf{w} \rangle = \langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle + \langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle + \langle \mathbf{w}, \mathbf{v} \rangle + \langle \mathbf{w}, \mathbf{w} \rangle \\ &= \|\mathbf{v}\|^2 + 2\langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle + \|\mathbf{w}\|^2 \leq \|\mathbf{v}\|^2 + 2\|\mathbf{v}\| \|\mathbf{w}\| + \|\mathbf{w}\|^2 = (\|\mathbf{v}\| + \|\mathbf{w}\|)^2. \end{aligned}$$

iii) $\|c\mathbf{v}\|^2 = \langle c\mathbf{v}, c\mathbf{v} \rangle = c^2 \langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle = c^2 \|\mathbf{v}\|^2 \implies \|c\mathbf{v}\| = \sqrt{c^2} \|\mathbf{v}\| = |c| \, \|\mathbf{v}\|$. $\square$

Olkoot $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$, $\mathbf{v} \neq \mathbf{0} \neq \mathbf{w}$. Lauseen 3.2.6 i) nojalla $\|\mathbf{v}\| > 0$ ja $\|\mathbf{w}\| > 0$. Schwarzin epäyhtälön nojalla on

$$\frac{\langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle}{\|\mathbf{v}\| \|\mathbf{w}\|} \in [-1, 1],$$

joten on olemassa yksikäsitteinen $\theta \in [0, \pi]$, jolla

$$\cos \theta = \frac{\langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle}{\|\mathbf{v}\| \|\mathbf{w}\|}.$$

Kuten $\mathbb{R}^n$:ssä, sanomme, että $\sphericalangle(\mathbf{v}, \mathbf{w}) = \theta$ on *vektorien* $\mathbf{v}$ *ja* $\mathbf{w}$ *välinen kulma*. Yleisessä tapauksessa tällä käsitteellä ei taaskaan ole varsinaista geometrista sisältöä.

Vektorit $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$ ovat *kohtisuorassa toisiaan vastaan* eli *ortogonaaliset*, merkitään $\mathbf{v} \perp \mathbf{w}$, jos $\langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle = 0$.

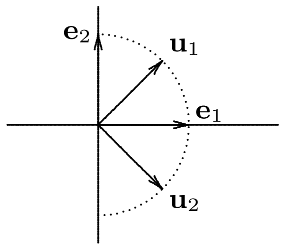
Jos $\mathbf{v} \neq \mathbf{0} \neq \mathbf{w}$, niin $\mathbf{v} \perp \mathbf{w} \iff \cos \sphericalangle(\mathbf{v}, \mathbf{w}) = 0 \iff \sphericalangle(\mathbf{v}, \mathbf{w}) = \dfrac{\pi}{2}$.

Määritelmä 3.2.7. Jono $(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n)$ sisätuloavaruuden V vektoreita on *ortogonaalinen*, jos $\mathbf{v}_i \neq \mathbf{0}$ kaikilla i ja $\mathbf{v}_i \perp \mathbf{v}_j$ aina, kun $i \neq j$. Jono $(\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n)$ on *ortonormaali*, jos se on ortogonaalinen ja $\|\mathbf{u}_i\| = 1$ kaikilla i.

Huomautus 3.2.8. Jos $(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n)$ on ortogonaalinen, niin $(\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n)$, missä $\mathbf{u}_i = \mathbf{v}_i / \|\mathbf{v}_i\|$ kaikilla i, on ortonormaali. Sanomme, että tässä ortonormaali jono $(\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n)$ on saatu *normittamalla* ortogonaalinen jono $(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n)$.

Esimerkki 3.2.9. a) $\mathbb{R}^n$:n luonnollinen kanta $(\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n)$ on ortonormaali pistetulon suhteen.
b) Merkitään

$$\mathbf{u}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} [1 \quad 1]^T \in \mathbb{R}^2,$$
$$\mathbf{u}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} [1 \quad -1]^T \in \mathbb{R}^2.$$



Tällöin $(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2)$ on ortonormaali.

Lause 3.2.10. *("Pythagoras")*

$$\|\mathbf{v} + \mathbf{w}\|^2 = \|\mathbf{v}\|^2 + \|\mathbf{w}\|^2 \iff \mathbf{v} \perp \mathbf{w}.$$

Todistus. Koska $\|\mathbf{v}+\mathbf{w}\|^2 = \langle \mathbf{v}+\mathbf{w}, \mathbf{v}+\mathbf{w} \rangle = \|\mathbf{v}\|^2 + 2\langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle + \|\mathbf{w}\|^2$, on $\|\mathbf{v}+\mathbf{w}\|^2 = \|\mathbf{v}\|^2 + \|\mathbf{w}\|^2$ täsmälleen silloin, kun $\langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle = 0$. $\square$

Lause 3.2.11. *Jokainen ortogonaalinen jono* $(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n)$ *on vapaa.*

Todistus. Olkoot $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$ sellaisia, että $x_1\mathbf{v}_1 + \cdots + x_n\mathbf{v}_n = \mathbf{0}$. Olkoon $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Silloin

$$\begin{aligned} 0 = \langle \mathbf{0}, \mathbf{v}_i \rangle &= \langle x_1\mathbf{v}_1 + \cdots + x_n\mathbf{v}_n, \mathbf{v}_i \rangle = \\ &= x_1\langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_i \rangle + \cdots + x_n\langle \mathbf{v}_n, \mathbf{v}_i \rangle = \\ &= x_i \langle \mathbf{v}_i, \mathbf{v}_i \rangle \qquad (\langle \mathbf{v}_j, \mathbf{v}_i \rangle = 0, \text{ kun } j \neq i) \\ &= x_i \|\mathbf{v}_i\|^2; \end{aligned}$$

koska $\mathbf{v}_i \neq \mathbf{0}$, on $\|\mathbf{v}_i\|^2 > 0$, joten $x_i = 0$. $\square$

3.3 Gramin-Schmidtin menetelmä

Seuraava lause osoittaa, miksi ortonormaalin kannan löytäminen (äärellisulotteiselle) sisätuloavaruudelle olisi hyödyllistä:

Lause 3.3.1. *Olkoon* $S = (\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n)$ *sisätuloavaruuden* V *ortonormaali kanta ja olkoot* $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$*. Tällöin*

a) $\mathbf{v} = \sum\limits_{k=1}^{n} \langle \mathbf{v}, \mathbf{u}_k \rangle \mathbf{u}_k$ *(*$\mathbf{v}$*:n koordinaatit kannassa* S *ovat* $\langle \mathbf{v}, \mathbf{u}_k \rangle$*,* $k = 1, \ldots, n$*).*

b) $\langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle = [\mathbf{v}]_S \cdot [\mathbf{w}]_S$.

Todistus. Olkoon $[\mathbf{v}]_S = [\, x_1 \; x_2 \; \ldots \; x_n \,]^T$ ja $[\mathbf{w}]_S = [\, y_1 \; y_2 \; \ldots \; y_n \,]^T$.

a) Kun $k \in \{1, \ldots, n\}$, on

$$\langle \mathbf{v}, \mathbf{u}_k \rangle = \left\langle \sum_{i=1}^{n} x_i \mathbf{u}_i, \mathbf{u}_k \right\rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i \langle \mathbf{u}_i, \mathbf{u}_k \rangle = x_k,$$

koska

$$\langle \mathbf{u}_i, \mathbf{u}_k \rangle = \begin{cases} 1, & \text{kun } i = k \\ 0, & \text{kun } i \neq k. \end{cases}$$

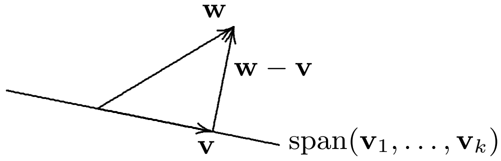
(b)

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle &= \left\langle \sum_{i=1}^{n} x_i \mathbf{u}_i, \sum_{j=1}^{n} y_j \mathbf{u}_j \right\rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i \left\langle \mathbf{u}_i, \sum_{j=1}^{n} y_j \mathbf{u}_j \right\rangle \\ &= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} x_i y_j \langle \mathbf{u}_i, \mathbf{u}_j \rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i = [\mathbf{v}]_S \cdot [\mathbf{w}]_S. \quad \square \end{aligned}$$

Olkoon V sisätuloavaruus. Ortonormaalien jonojen konstruointia varten tarvitaan aputulos:

Lemma 3.3.2. *Jos jono* $(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k)$ *on ortogonaalinen ja* $\mathbf{w} \in V$*, on olemassa täsmälleen yksi* $\mathbf{v} \in \operatorname{span}(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k)$*, jolla* $(\mathbf{w} - \mathbf{v}) \perp \mathbf{v}_i$ *kaikilla* $i \in \{1, \ldots, k\}$*, nimittäin*

$$\mathbf{v} = \sum_{j=1}^{k} \frac{\langle \mathbf{w}, \mathbf{v}_j \rangle}{\langle \mathbf{v}_j, \mathbf{v}_j \rangle} \mathbf{v}_j.$$



Todistus. Olkoon $\mathbf{v} = \sum_{j=1}^{k} x_j \mathbf{v}_j$, missä $x_j \in \mathbb{R}\ \forall j$. Olkoon $i \in \{1, \dots, k\}$. Tällöin

$$(\mathbf{w}-\mathbf{v}) \perp \mathbf{v}_i \iff 0 = \langle \mathbf{w}-\mathbf{v}, \mathbf{v}_i \rangle = \langle \mathbf{w}, \mathbf{v}_i \rangle - \langle \mathbf{v}, \mathbf{v}_i \rangle = \langle \mathbf{w}, \mathbf{v}_i \rangle - \left\langle \sum_{j=1}^{k} x_j \mathbf{v}_j, \mathbf{v}_i \right\rangle$$

$$= \langle \mathbf{w}, \mathbf{v}_i \rangle - \sum_{j=1}^{k} x_j \langle \mathbf{v}_j, \mathbf{v}_i \rangle = \langle \mathbf{w}, \mathbf{v}_i \rangle - x_i \langle \mathbf{v}_i, \mathbf{v}_i \rangle \iff x_i = \frac{\langle \mathbf{w}, \mathbf{v}_i \rangle}{\langle \mathbf{v}_i, \mathbf{v}_i \rangle}. \quad \square$$

Lause (ja laskumenetelmä) 3.3.3. *(Gram–Scmidt) Olkoon* $(\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_n)$ *vapaa jono sisätuloavaruudessa* V, $n \geq 1$. *Tällöin on olemassa ortonormaali jono* $(\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n)$, *jolla*

$$\operatorname{span}(\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_k) = \operatorname{span}(\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_k) \quad \textit{kaikilla } k \in \{1, 2, \dots, n\}.$$

Todistus. Konstruoidaan rekursiivisesti ortogonaalinen jono $(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n)$, jolla pätee $\operatorname{span}(\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_k) = \operatorname{span}(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k)\ \forall\, k \in \{1, 2, \dots, n\}$. Vaadittu $(\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n)$ saadaan normittamalla: $\mathbf{u}_k = \mathbf{v}_k / \|\mathbf{v}_k\|$.

1) Koska $(\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_n)$ on vapaa, on $\mathbf{w}_1 \neq \mathbf{0}$. Valitaan $\mathbf{v}_1 = \mathbf{w}_1$ (tai $\mathbf{v}_1 = a_1 \mathbf{w}_1$ millä tahansa $a_1 \in \mathbb{R}$, $a_1 \neq 0$). Silloin $(\mathbf{v}_1)$ on ortogonaalinen ja $\operatorname{span}(\mathbf{w}_1) = \operatorname{span}(\mathbf{v}_1)$.

2) Olkoon $k \leq n$. Oletetaan, että on jo löydetty sellainen ortogonaalinen jono $(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k)$, että $\operatorname{span}(\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_l) = \operatorname{span}(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_l)\ \forall l \in \{1, \dots, k\}$. Jos $k < n$, jatketaan ja määritellään

$$\mathbf{v}'_{k+1} = \mathbf{w}_{k+1} - \sum_{j=1}^{k} \frac{\langle \mathbf{w}_{k+1}, \mathbf{v}_j \rangle}{\langle \mathbf{v}_j, \mathbf{v}_j \rangle} \mathbf{v}_j,$$

sekä $\mathbf{v}_{k+1} = a_{k+1} \mathbf{v}'_{k+1}$ millä tahansa $a_{k+1} \in \mathbb{R}$, $a_{k+1} \neq 0$ (esimerkiksi $a_{k+1} = 1$). Lemman 3.3.2 nojalla on $\mathbf{v}_{k+1} \perp \mathbf{v}_i\ \forall i \in \{1, \dots, k\}$. Lisäksi $\mathbf{v}_{k+1} \neq \mathbf{0}$. Jos nimittäin olisi $\mathbf{v}_{k+1} = \mathbf{0}$, niin $\mathbf{v}'_{k+1} = \mathbf{0}$, jolloin $\mathbf{w}_{k+1} \in \operatorname{span}(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k) = \operatorname{span}(\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_k)$, mistä seuraisi, että $(\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_{k+1})$ olisi sidottu vastoin oletusta.

Lopuksi $\operatorname{span}(\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_{k+1}) = \operatorname{span}(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_{k+1})$, koska $\operatorname{span}(\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_k) = \operatorname{span}(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k)$ ja konstruktion nojalla

$$\mathbf{v}_{k+1} \in \operatorname{span}(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k, \mathbf{w}_{k+1}) = \operatorname{span}(\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_k, \mathbf{w}_{k+1})$$

ja $\mathbf{w}_{k+1} \in \operatorname{span}(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_{k+1})$. $\square$

Huomautus 3.3.4. a) Kertoimien $a_k \neq 0$ sopiva valinta saattaa helpottaa laskutyötä.

b) Jos Gramin–Schmidtin menetelmää yrittää soveltaa jonoon $(\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_n)$, joka ei ole vapaa, on $\mathbf{w}_{k+1} \in \operatorname{span}(\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_k)$ jollakin $k \in \{1, \dots, n-1\}$, ja tällöin konstruoitava vektori $\mathbf{v}_{k+1} = \mathbf{0}$.

Esimerkki 3.3.5. Tarkastellaan vektoreita $\mathbf{w}_1 = [\,1\ 1\ 1\ 0\,]^T$, $\mathbf{w}_2 = [\,-1\ 0\ -1\ 1\,]^T$ ja $\mathbf{w}_3 = [\,-1\ 0\ 0\ -1\,]^T$ sisätuloavaruudessa $\mathbb{R}^4$ (sisätulona pistetulo, kuten tavallisesti). Jono $(\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \mathbf{w}_3)$ on vapaa (miksi?). Sovelletaan siihen Gramin–Schmidtin menetelmää, so. *ortogonalisoidaan* ko. jono.

Valitaan $\mathbf{v}_1 = \mathbf{w}_1$.

$$\mathbf{v}_2' = \mathbf{w}_2 - \frac{\mathbf{w}_2 \cdot \mathbf{v}_1}{\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_1}\mathbf{v}_1 = \mathbf{w}_2 - (-\frac{2}{3})\mathbf{v}_1 = [\,-\tfrac{1}{3}\ \tfrac{2}{3}\ -\tfrac{1}{3}\ 1\,]^T\,;$$

valitaan $\mathbf{v}_2 = 3\mathbf{v}_2' = [\,-1\ 2\ -1\ 3\,]^T$.

$$\mathbf{v}_3' = \mathbf{w}_3 - \frac{\mathbf{w}_3 \cdot \mathbf{v}_1}{\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_1}\mathbf{v}_1 - \frac{\mathbf{w}_3 \cdot \mathbf{v}_2}{\mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{v}_2}\mathbf{v}_2 = \mathbf{w}_3 - (-\frac{1}{3})\mathbf{v}_1 - (-\frac{2}{15})\mathbf{v}_2 = [\,-\tfrac{4}{5}\ \tfrac{3}{5}\ \tfrac{1}{5}\ -\tfrac{3}{5}\,]^T\,;$$

valitaan $\mathbf{v}_3 = 5\mathbf{v}_3' = [\,-4\ 3\ 1\ -3\,]^T$.

On saatu ortogonaalinen jono $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3)$. Normitetaan:

$$\begin{aligned}
\mathbf{u}_1 &= \frac{\mathbf{v}_1}{\|\mathbf{v}_1\|} = \frac{1}{\sqrt{3}}\,[\,1\ 1\ 1\ 0\,]^T, \\
\mathbf{u}_2 &= \frac{\mathbf{v}_2}{\|\mathbf{v}_2\|} = \frac{1}{\sqrt{15}}\,[\,-1\ 2\ -1\ 3\,]^T, \\
\mathbf{u}_3 &= \frac{\mathbf{v}_3}{\|\mathbf{v}_3\|} = \frac{1}{\sqrt{35}}\,[\,-4\ 3\ 1\ -3\,]^T.
\end{aligned}$$

Tällöin $(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3)$ on ortonormaali jono. □

Seuraus 3.3.6. *Äärellisulotteisen sisätuloavaruuden V jokainen ortonormaali jono $(\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_k)$ voidaan täydentää V:n ortonormaaliksi kannaksi $(\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_k, \mathbf{u}_{k+1}, \dots, \mathbf{u}_n)$. Erityisesti V:llä on ortonormaaleja kantoja.*

Todistus. Lauseen 3.2.11 mukaan $(\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_k)$ on vapaa. Seurauksen 2.5.11 a)-kohdan mukaan se voidaan täydentää V:n kannaksi $(\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_k, \mathbf{w}_{k+1}, \dots, \mathbf{w}_n)$. Soveltamalla tähän jonoon Gramin–Scmidtin menetelmää saadaan V:n ortonormaali kanta $(\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_k, \mathbf{u}_{k+1}, \dots, \mathbf{u}_n)$ (vektorit $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_k$ eivät muutu konstruktiossa, jos valitaan $a_1 = \dots = a_k = 1$). □

3.4 Kohtisuora komplementti ja projektio

Olkoon V sisätuloavaruus ja $W \subset V$ aliavaruus. W:n *kohtisuora komplementti* V:ssä on

$$W^{\perp} = \{\mathbf{v} \in V \mid \mathbf{v} \perp \mathbf{w} \quad \text{kaikilla } \mathbf{w} \in W\}.$$

Lause 3.4.1. *$W^{\perp}$ on V:n aliavaruus.*

Todistus. i) Olkoot $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \in W^{\perp}$, ts. $\langle \mathbf{v}_1, \mathbf{w}\rangle = 0 = \langle \mathbf{v}_2, \mathbf{w}\rangle \ \forall \mathbf{w} \in W$. Tällöin

$$\langle \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2, \mathbf{w}\rangle = \langle \mathbf{v}_1, \mathbf{w}\rangle + \langle \mathbf{v}_2, \mathbf{w}\rangle = 0 + 0 = 0 \quad \forall \mathbf{w} \in W,$$

joten $\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 \in W^{\perp}$.
ii) Olkoon $\mathbf{v} \in W^{\perp}$, ts. $\langle \mathbf{v}, \mathbf{w}\rangle = 0 \ \forall \mathbf{w} \in W$, ja $a \in \mathbb{R}$. Tällöin

$$\langle a\mathbf{v}, \mathbf{w}\rangle = a\langle \mathbf{v}, \mathbf{w}\rangle = a \cdot 0 = 0 \quad \forall \mathbf{w} \in W,$$

joten $a\mathbf{v} \in W^{\perp}$.
iii) $\mathbf{0} \in W^{\perp}$, koska $\langle \mathbf{0}, \mathbf{w}\rangle = 0 \ \forall \mathbf{w} \in V$. $\square$

Huomautus 3.4.2. Samoin nähdään, että $\{\mathbf{v} \in V \mid \mathbf{v} \perp \mathbf{s} \quad \text{kaikilla } \mathbf{s} \in S\}$ on V:n aliavaruus, kun $S \subset V$ on mielivaltainen osajoukko.

Jos W on äärellisulotteinen, $W^{\perp}$ voidaan karakterisoida äärellisellä määrällä ehtoja:

Lause 3.4.3. $\mathrm{span}(\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_k)^{\perp} = \{\mathbf{v} \in V \mid \mathbf{v} \perp \mathbf{w}_j, \ j = 1, \dots, k\}$.

Todistus. "$\subset$". Selvä.
"$\supset$". Olkoon $\mathbf{v} \perp \mathbf{w}_j$ eli $\langle \mathbf{v}, \mathbf{w}_j\rangle = 0 \ \forall j \in \{1, \dots, k\}$, ja $\mathbf{w} \in \mathrm{span}(\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_k)$, jolloin $\mathbf{w} = x_1\mathbf{w}_1 + \cdots + x_k\mathbf{w}_k$ eräillä $x_i \in \mathbb{R}$, $i = 1, \dots, k$. Silloin

$$\langle \mathbf{v}, \mathbf{w}\rangle = \langle \mathbf{v}, x_1\mathbf{w}_1 + \cdots + x_k\mathbf{w}_k\rangle = x_1\langle \mathbf{v}, \mathbf{w}_1\rangle + \cdots + x_k\langle \mathbf{v}, \mathbf{w}_k\rangle = x_1 \cdot 0 + \cdots + x_k \cdot 0 = 0,$$

joten $\mathbf{v} \perp \mathbf{w}$. Näin ollen $\mathbf{v} \in \mathrm{span}(\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_k)^{\perp}$. $\square$

$\mathbb{R}^m$:ssä (pistetulon suhteen) $\mathrm{span}(\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n)^{\perp}$ on erään homogeenisen yhtälöryhmän ratkaisujoukko:

Lause 3.4.4. *Olkoot $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n \in \mathbb{R}^m$ matriisin $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ sarakkeet. Tällöin avaruudelle $\mathrm{Col}(A) = \mathrm{span}(\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n)$ pätee*

$$\mathrm{Col}(A)^{\perp} = \mathrm{Null}(A^T).$$

Todistus. Olkoon $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^m$. Silloin

$$\mathbf{x} \in \mathrm{Null}(A^T) \iff A^T\mathbf{x} = \mathbf{0} \quad \text{(matriisitulo)} \iff \mathbf{a}_j^T\mathbf{x} = \mathbf{0} \quad \forall j \quad \text{(matriisitulo)}$$
$$\iff \mathbf{a}_j \cdot \mathbf{x} = 0 \quad \forall j \quad \text{(pistetulo)} \iff \mathbf{x} \in \mathrm{span}(\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n)^{\perp} \quad (3.4.3). \quad \square$$

Lause 3.4.5. *Olkoon W sisätuloavaruuden V äärellisulotteinen aliavaruus. Silloin*

a) *jokaista $\mathbf{v} \in V$ kohti on olemassa yksikäsitteiset $\mathbf{w} \in W$ ja $\mathbf{w}' \in W^\perp$, joilla $\mathbf{v} = \mathbf{w} + \mathbf{w}'$;*

b) $(W^\perp)^\perp = W$;

c) *jos koko V on äärellisulotteinen, on lisäksi*

$$\dim(V) = \dim(W) + \dim(W^\perp).$$

Todistus. a) Olkoon $(\mathbf{w}_1, \ldots, \mathbf{w}_k)$ W:n ortonormaali kanta (seuraus 3.3.6). Jos $\mathbf{v} \in V$, on lemman 3.3.2 nojalla olemassa yksikäsitteinen $\mathbf{w} \in W$, nimittäin

$$\mathbf{w} = \sum_{j=1}^{k} \langle \mathbf{v}, \mathbf{w}_j \rangle \mathbf{w}_j,$$

jolla $\mathbf{w}' = \mathbf{v} - \mathbf{w} \in W^\perp$. Nyt tietenkin $\mathbf{v} = \mathbf{w} + \mathbf{w}'$.

b) Olkoon $\mathbf{w} \in W$. $W^\perp$:n määritelmän nojalla $\mathbf{w}' \perp \mathbf{w}$ $\forall \mathbf{w}' \in W^\perp$, joten $\mathbf{w} \perp \mathbf{w}'$ $\forall \mathbf{w}' \in W^\perp$, mistä seuraa $(W^\perp)^\perp$:n määritelmän nojalla, että $\mathbf{w} \in (W^\perp)^\perp$. Siis $W \subset (W^\perp)^\perp$.

Kääntäen, olkoon $\mathbf{v} \in (W^\perp)^\perp$. Kohdan a) nojalla $\mathbf{v} = \mathbf{w} + \mathbf{w}'$ eräillä $\mathbf{w} \in W$, $\mathbf{w}' \in W^\perp$. Koska $\mathbf{v} \in (W^\perp)^\perp$, on $\langle \mathbf{v}, \mathbf{w}' \rangle = 0$, ja siis

$$0 = \langle \mathbf{v}, \mathbf{w}' \rangle = \langle \mathbf{w} + \mathbf{w}', \mathbf{w}' \rangle = \langle \mathbf{w}, \mathbf{w}' \rangle + \langle \mathbf{w}', \mathbf{w}' \rangle = 0 + \|\mathbf{w}'\|^2 = \|\mathbf{w}'\|^2.$$

Tästä seuraa, että $\mathbf{w}' = \mathbf{0}$, ja edelleen $\mathbf{v} = \mathbf{w} \in W$. Näin ollen $(W^\perp)^\perp \subset W$.

c) Olkoon $(\mathbf{w}_1, \ldots, \mathbf{w}_k)$ W:n kanta ja $(\mathbf{w}'_1, \ldots, \mathbf{w}'_l)$ $W^\perp$:n kanta. Olkoon $\mathbf{v} \in V$. Kohdan a) mukaan $\mathbf{v}$:llä on yksikäsitteinen esitys $\mathbf{v} = \mathbf{w} + \mathbf{w}'$, missä $\mathbf{w} \in W$ ja $\mathbf{w}' \in W^\perp$. Lauseen 2.5.2 nojalla $\mathbf{w}$:llä ja $\mathbf{w}'$:lla on yksikäsitteiset esitykset $\mathbf{w} = x_1\mathbf{w}_1 + \cdots + x_k\mathbf{w}_k$ ja $\mathbf{w}' = y_1\mathbf{w}'_1 + \cdots + y_l\mathbf{w}'_l$, missä $x_1, \ldots, x_k, y_1, \ldots, y_l \in \mathbb{R}$. Laskemalla nämä yhteen saadaan $\mathbf{v}$:lle yksikäsitteinen esitys

$$\mathbf{v} = x_1\mathbf{w}_1 + \cdots + x_k\mathbf{w}_k + y_1\mathbf{w}'_1 + \cdots + y_l\mathbf{w}'_l$$

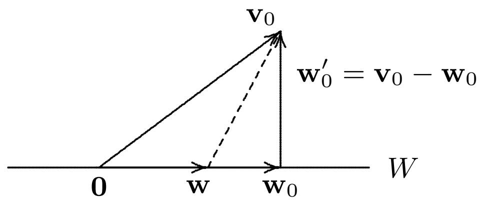
vektorien $\mathbf{w}_1, \ldots, \mathbf{w}_k, \mathbf{w}'_1, \ldots, \mathbf{w}'_l$ lineaarikombinaationa. Koska tämä pätee jokaisella vektorilla $\mathbf{v} \in V$, on $(\mathbf{w}_1, \ldots, \mathbf{w}_k, \mathbf{w}'_1, \ldots, \mathbf{w}'_l)$ lauseen 2.5.2 nojalla V:n kanta. Siten

$$\dim(V) = k + l = \dim(W) + \dim(W^\perp). \quad \square$$

Olkoon W V:n äärellisulotteinen aliavaruus ja $\mathbf{v}_0 \in V$. Kun $\mathbf{v}_0 = \mathbf{w}_0 + \mathbf{w}'_0$, missä $\mathbf{w}_0 \in W$ ja $\mathbf{w}'_0 = \mathbf{v}_0 - \mathbf{w}_0 \in W^\perp$ kuten 3.4.5 a):ssa, merkitään

$$\mathrm{proj}_W(\mathbf{v}_0) = \mathbf{w}_0 \in W,$$

$\mathbf{v}_0$:n *kohtisuora projektio* W:lle.



Koska $\mathbf{w}_0 \perp \mathbf{w}_0'$, on lauseen 3.2.10 nojalla

$$\|\mathbf{v}_0\|^2 = \|\mathbf{w}_0\|^2 + \|\mathbf{w}_0'\|^2 = \|\mathbf{w}_0\|^2 + \|\mathbf{v}_0 - \mathbf{w}_0\|^2$$

Lauseen 3.5.5 a):n todistuksessa havaittiin: Jos $(\mathbf{w}_1, \ldots, \mathbf{w}_k)$ on W:n ortonormaali kanta, on

$$\mathrm{proj}_W(\mathbf{v}_0) = \sum_{j=1}^{k} \langle \mathbf{v}_0, \mathbf{w}_j \rangle \mathbf{w}_j.$$

Kun $\mathbf{w} \in W$, $\mathbf{w} \neq \mathbf{w}_0$, on $\|\mathbf{v}_0 - \mathbf{w}_0\| < \|\mathbf{v}_0 - \mathbf{w}\|$, sillä

$$\begin{aligned}\|\mathbf{v}_0 - \mathbf{w}\|^2 &= \|\mathbf{w}_0 + \mathbf{w}_0' - \mathbf{w}\|^2 = \|(\mathbf{w}_0 - \mathbf{w}) + \mathbf{w}_0'\|^2 \underset{3.2.10}{=} \|\mathbf{w}_0 - \mathbf{w}\|^2 + \|\mathbf{w}_0'\|^2 \\ &> \|\mathbf{w}_0'\|^2 = \|\mathbf{v}_0 - \mathbf{w}_0\|^2,\end{aligned}$$

koska $\mathbf{w}_0 - \mathbf{w} \neq \mathbf{0}$. Siten

$$d(\mathbf{v}_0, W) = \|\mathbf{v}_0 - \mathrm{proj}_W(\mathbf{v}_0)\| = \min\{\|\mathbf{v}_0 - \mathbf{w}\| \mid \mathbf{w} \in W\} \tag{3.4.6}$$

on $\mathbf{v}_0$:n (lyhin) *etäisyys* aliavaruudesta W.

Huomautus 3.4.7. Olkoon sisätuloavaruus V äärellisulotteinen ja $W \subset V$ aliavaruus. Lauseen 3.4.5 b)-kohdan mukaan on $(W^\perp)^\perp = W$. Kun $\mathbf{v} \in V$, $\mathbf{w} = \mathrm{proj}_W(\mathbf{v})$ ja $\mathbf{w}' = \mathbf{v} - \mathbf{w}$, on $\mathbf{v} = \mathbf{w}' + \mathbf{w}$, missä $\mathbf{w}' \in W^\perp$ ja $\mathbf{w} \in W = (W^\perp)^\perp$. Kohtisuoran projektion määritelmän mukaan on $\mathbf{w}' = \mathrm{proj}_{W^\perp}(\mathbf{v})$, ja saadaan kaava

$$\mathrm{proj}_W(\mathbf{v}) + \mathrm{proj}_{W^\perp}(\mathbf{v}) = \mathbf{v} \quad \forall \mathbf{v} \in V.$$

Esimerkki 3.4.8. a) Olkoon $W = \mathrm{span}(\mathbf{w}) = \{t\mathbf{w} \mid t \in \mathbb{R}\}$, missä $\mathbf{w} \neq \mathbf{0}$ (siis $\dim(W) = 1$), ja $\mathbf{v} \in V$. Koska $(\mathbf{w}/\|\mathbf{w}\|)$ on W:n ortonormaali kanta, on

$$\mathrm{proj}_W(\mathbf{v}) = \left\langle \mathbf{v}, \frac{\mathbf{w}}{\|\mathbf{w}\|} \right\rangle \frac{\mathbf{w}}{\|\mathbf{w}\|} = \frac{\langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle}{\|\mathbf{w}\|^2} \mathbf{w},$$

$$\begin{aligned} d(\mathbf{v},W)^2 &= \|\mathbf{v}-\operatorname{proj}_W(\mathbf{v})\|^2 = \|\mathbf{v}\|^2 - \|\operatorname{proj}_W(\mathbf{v})\|^2 \\ &= \|\mathbf{v}\|^2 - \frac{\langle \mathbf{v},\mathbf{w}\rangle^2}{\|\mathbf{w}\|^4}\|\mathbf{w}\|^2 = \frac{\|\mathbf{v}\|^2\|\mathbf{w}\|^2 - \langle \mathbf{v},\mathbf{w}\rangle^2}{\|\mathbf{w}\|^2}. \end{aligned}$$

b) Olkoon $\mathbf{w}_1 = \frac{1}{3}[\,2\ 1\ {-2}\,]^T$, $\mathbf{w}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}[\,1\ 0\ 1\,]^T$, ja $W = \operatorname{span}(\mathbf{w}_1,\mathbf{w}_2) \subset \mathbb{R}^3$. Tällöin $(\mathbf{w}_1,\mathbf{w}_2)$ on W:n ortonormaali kanta. Olkoon $\mathbf{v} = [\,1\ 1\ 0\,]^T \in \mathbb{R}^3$. Silloin

$$\begin{aligned} \operatorname{proj}_W(\mathbf{v}) &= (\mathbf{v}\cdot\mathbf{w}_1)\mathbf{w}_1 + (\mathbf{v}\cdot\mathbf{w}_2)\mathbf{w}_2 = \mathbf{w}_1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{w}_2 = \frac{1}{6}[\,7\ 2\ {-1}\,]^T, \\ \mathbf{v} - \operatorname{proj}_W(\mathbf{v}) &= [\,1\ 1\ 0\,]^T - \frac{1}{6}[\,7\ 2\ {-1}\,]^T = \frac{1}{6}[\,{-1}\ 4\ 1\,]^T, \\ d(\mathbf{v},W) &= \|\mathbf{v}-\operatorname{proj}_W(\mathbf{v})\| = \frac{1}{6}\sqrt{(-1)^2+4^2+1^2} = \frac{1}{2}\sqrt{2}. \end{aligned}$$

Lauseesta 3.4.5 b) seuraa

Lause (ja laskumenetelmä) 3.4.9. *Jokainen $\mathbb{R}^m$:n aliavaruus on jonkin homogeenisen yhtälöryhmän ratkaisujoukko.*

Todistus. Olkoon $W \subset \mathbb{R}^m$ aliavaruus. Lauseen 2.5.12 nojalla W on äärellisulotteinen, joten $W = \operatorname{span}(\mathbf{a}_1,\ldots,\mathbf{a}_n)$ eräillä $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n \in \mathbb{R}^m$. Merkitään $A = [\,\mathbf{a}_1\ \mathbf{a}_2\ \ldots\ \mathbf{a}_n\,] \in \mathbb{R}^{m\times n}$, jolloin $W = \operatorname{Col}(A)$. Lauseen 3.4.4 nojalla

$$W^\perp = \operatorname{Col}(A)^\perp = \operatorname{Null}(A^T)$$

on yhtälöryhmän $\mathbf{a}_j\cdot\mathbf{x} = 0$, $j = 1,\ldots,n$, ratkaisujoukko. Ratkaisemalla tämän yhtälöryhmän saamme $W^\perp$:n kannan $(\mathbf{b}_1,\ldots,\mathbf{b}_r)$, ks. 2.6.9 (itse asiassa virittäjäjono riittää). Siis $W^\perp = \operatorname{span}(\mathbf{b}_1,\ldots,\mathbf{b}_r) = \operatorname{Col}(B)$, missä $B = [\,\mathbf{b}_1\ \mathbf{b}_2\ \ldots\ \mathbf{b}_r\,] \in \mathbb{R}^{m\times r}$, ja 3.4.5 b):n nojalla

$$W = (W^\perp)^\perp = \operatorname{Col}(B)^\perp = \operatorname{Null}(B^T)$$

on yhtälöryhmän $\mathbf{b}_j\cdot\mathbf{x} = 0$, $j = 1,\ldots,r$, ratkaisujoukko. $\square$

Äskeisessä lauseessa mainittu, annettua aliavaruutta esittävä homogeeninen yhtälöryhmä ei tietenkään ole yksikäsitteisesti määrätty.

Esimerkki 3.4.10. a) *Tason normaalimuotoinen yhtälö.* Tarkastellaan $\mathbb{R}^3$:ssa tasoa

$$T = \{\mathbf{p} + s\mathbf{v} + t\mathbf{w} \mid s,t\in\mathbb{R}\} = \mathbf{p} + W,$$

missä $\mathbf{p},\mathbf{v},\mathbf{w} \in \mathbb{R}^3$, $\mathbf{v} \nparallel \mathbf{w}$ ja $W = \operatorname{span}(\mathbf{v},\mathbf{w})$ (siis $\dim(W) = 2$). Lauseen 3.4.5 c) nojalla $\dim(W^\perp) = 3 - 2 = 1$, joten $W^\perp = \operatorname{span}(\mathbf{a})$, missä $\mathbf{a} = [\,a_1\ a_2\ a_3\,]^T \in W^\perp$,

$\mathbf{a} \neq \mathbf{0}$; siis $\mathbf{a}$ on W:n ja T:n (mikä tahansa) *normaali*, esimerkiksi $\mathbf{a} = \mathbf{v} \times \mathbf{w}$ ristitulo, joka opitaan muodostamaan kappaleessa 3.5. Kuten 3.4.9:ssä,

$$W = (W^{\perp})^{\perp} = \operatorname{span}(\mathbf{a})^{\perp} = \{\mathbf{x} \mid \mathbf{a} \cdot \mathbf{x} = 0\},$$
$$T = \{\mathbf{x} \mid \mathbf{x} - \mathbf{p} \in W\} = \{\mathbf{x} \mid \mathbf{a} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{p}) = 0\}.$$

Yhtälö $\mathbf{a} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{p}) = 0$ eli $a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + b = 0$ $(b = -\mathbf{a} \cdot \mathbf{p})$ on T:n *normaalimuotoinen yhtälö*.

b) *Pisteen etäisyys tasosta.* Tarkastellaan edelleen a)-kohdan tasoa T. Olkoon $\mathbf{y} = [\,y_1\ y_2\ y_3\,]^T \in \mathbb{R}^3$. Koska $(\mathbf{a}/\|\mathbf{a}\|)$ on $W^{\perp}$:n ortonormaali kanta, on $\mathbf{y}$:n etäisyys tasosta T

$$\begin{aligned} d(\mathbf{y}, T) &= d(\mathbf{y} - \mathbf{p}, W) = \|(\mathbf{y} - \mathbf{p}) - \operatorname{proj}_W(\mathbf{y} - \mathbf{p})\| = \|\operatorname{proj}_{W^{\perp}}(\mathbf{y} - \mathbf{p})\| \\ &= \left\| \left((\mathbf{y} - \mathbf{p}) \cdot \frac{\mathbf{a}}{\|\mathbf{a}\|} \right) \frac{\mathbf{a}}{\|\mathbf{a}\|} \right\| = \frac{|(\mathbf{y} - \mathbf{p}) \cdot \mathbf{a}|}{\|\mathbf{a}\|^2} \|\mathbf{a}\| = \frac{|a_1y_1 + a_2y_2 + a_3y_3 + b|}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}}. \end{aligned}$$

Esimerkki 3.4.11. Olkoon $\mathbf{v}_1 = [\,1\ 0\ {-1}\,]^T$, $\mathbf{v}_2 = [\,0\ 1\ 1\,]^T$, $\mathbf{w}_1 = [\,1\ {-1}\ 0\,]^T$, $\mathbf{w}_2 = [\,0\ 2\ 1\,]^T$ ja $V = \operatorname{span}(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2) \subset \mathbb{R}^3$, $W = \operatorname{span}(\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2) \subset \mathbb{R}^3$. Helposti nähdään, että

$$V \cap W = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \mid \mathbf{x} \in V \text{ ja } \mathbf{x} \in W\}$$

on $\mathbb{R}^3$:n aliavaruus (geometrisesti kahden origon kautta kulkevan tason leikkaus). Etsittävä $V \cap W$:lle jokin kanta.

Ratkaisu. Olkoon $\mathbf{x} = [\,x_1\ x_2\ x_3\,]^T \in \mathbb{R}^3$. Etsitään aluksi V:lle ja W:lle normaalimuotoiset yhtälöt.

$$\mathbf{x} \in V^{\perp} \iff \mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{x} = \mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{x} = 0 \iff \begin{cases} x_1 \phantom{{}+x_2} - x_3 = 0 \\ \phantom{x_1 - {}} x_2 + x_3 = 0 \end{cases} \iff \mathbf{x} = t\,[\,1\ {-1}\ 1\,]^T,$$

$t \in \mathbb{R}$. Siis $V^{\perp} = \operatorname{span}([\,1\ {-1}\ 1\,]^T)$, ja

$$\mathbf{x} \in V = (V^{\perp})^{\perp} \iff [\,1\ {-1}\ 1\,]^T \cdot \mathbf{x} = 0 \iff x_1 - x_2 + x_3 = 0.$$

Vastaavasti $W^{\perp} = \operatorname{span}([\,1\ 1\ {-2}\,]^T)$, ja

$$\mathbf{x} \in W = (W^{\perp})^{\perp} \iff x_1 + x_2 - 2x_3 = 0.$$

Edelleen

$$\mathbf{x} \in V \cap W \iff \begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 - 2x_3 = 0 \end{cases} \iff \cdots \iff \mathbf{x} = t\,[\,1\ 3\ 2\,]^T,$$

missä $t \in \mathbb{R}$. Näin ollen $V \cap W = \operatorname{span}([\,1\ 3\ 2\,]^T)$ on yksiulotteinen (origon kautta kulkeva suora), kantana vektori $[\,1\ 3\ 2\,]^T$.

3.5 Ristitulo $\mathbb{R}^3$:ssa

Tarkastellaan $\mathbb{R}^3$:n vektoreita $\mathbf{u} = [\,u_1\ u_2\ u_3\,]^T$ jne.

Määritelmä 3.5.1. Vektorien $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$ *ristitulo* on

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \begin{bmatrix} u_2v_3 - u_3v_2 \\ u_3v_1 - u_1v_3 \\ u_1v_2 - u_2v_1 \end{bmatrix} = (u_2v_3 - u_3v_2)\mathbf{i} + (u_3v_1 - u_1v_3)\mathbf{j} + (u_1v_2 - u_2v_1)\mathbf{k} \in \mathbb{R}^3.$$

(Palautetaan mieleen: $\mathbf{i} = \mathbf{e}_1 = [\,1\ 0\ 0\,]^T$ jne.)

Huomautus 3.5.2. Luvussa 5 merkitään

$$u_2v_3 - u_3v_2 = \begin{vmatrix} u_2 & u_3 \\ v_2 & v_3 \end{vmatrix} \quad \text{(2-rivinen } \textit{determinantti}\text{) jne.}$$

Esimerkki 3.5.3. (a) Olkoon $\mathbf{u} = 2\mathbf{i} + \mathbf{j} + 2\mathbf{k}$ ja $\mathbf{v} = 3\mathbf{i} - \mathbf{j} - 3\mathbf{k}$. Tällöin

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \big(1\cdot(-3) - 2\cdot(-1)\big)\mathbf{i} + \big(2\cdot 3 - 2\cdot(-3)\big)\mathbf{j} + \big(2\cdot(-1) - 1\cdot 3\big)\mathbf{k} = -\mathbf{i} + 12\mathbf{j} - 5\mathbf{k}.$$

(b)
$$\begin{aligned} &\mathbf{i}\times\mathbf{i} = \mathbf{j}\times\mathbf{j} = \mathbf{k}\times\mathbf{k} = \mathbf{0};\\ &\mathbf{i}\times\mathbf{j} = \mathbf{k}, \quad \mathbf{j}\times\mathbf{k} = \mathbf{i}, \quad \mathbf{k}\times\mathbf{i} = \mathbf{j};\\ &\mathbf{j}\times\mathbf{i} = -\mathbf{k}, \quad \mathbf{k}\times\mathbf{j} = -\mathbf{i}, \quad \mathbf{i}\times\mathbf{k} = -\mathbf{j}. \end{aligned}$$

Lause 3.5.4. *Ristitulon ominaisuuksia:*

i) $\mathbf{u}\times\mathbf{v} = -(\mathbf{v}\times\mathbf{u})$ *(antikommutointi)*

ii) $\mathbf{u}\times(\mathbf{v}+\mathbf{w}) = \mathbf{u}\times\mathbf{v} + \mathbf{u}\times\mathbf{w}$ *(osittelulaki)*

iii) $(\mathbf{u}+\mathbf{v})\times\mathbf{w} = \mathbf{u}\times\mathbf{w} + \mathbf{v}\times\mathbf{w}$ *(osittelulaki)*

iv) $c(\mathbf{u}\times\mathbf{v}) = (c\mathbf{u})\times\mathbf{v} = \mathbf{u}\times(c\mathbf{v})$

v) $\mathbf{u}\times\mathbf{u} = \mathbf{0}$ *(alternoivuus)*

vi) $\mathbf{0}\times\mathbf{u} = \mathbf{u}\times\mathbf{0} = \mathbf{0}$

vii) $\mathbf{u}\cdot(\mathbf{v}\times\mathbf{w}) = (\mathbf{u}\times\mathbf{v})\cdot\mathbf{w}$

viii) $(\mathbf{u}\times\mathbf{v})\times\mathbf{w} = (\mathbf{u}\cdot\mathbf{w})\mathbf{v} - (\mathbf{v}\cdot\mathbf{w})\mathbf{u}$

ix) $\mathbf{u}\times(\mathbf{v}\times\mathbf{w}) = (\mathbf{u}\cdot\mathbf{w})\mathbf{v} - (\mathbf{u}\cdot\mathbf{v})\mathbf{w}$

x) $\|\mathbf{u}\times\mathbf{v}\|^2 = \|\mathbf{u}\|^2\|\mathbf{v}\|^2 - (\mathbf{u}\cdot\mathbf{v})^2$ *(Lagrangen identiteetti).*

(Muistisääntö kohtiin viii) ja ix): ”Yksinäinen kaipaa seuraa, laitimmaiset ensin”).

Todistus. Kohdat i)–ix) voi todistaa suoralla laskulla. Esimerkiksi ix):

$$\begin{aligned}\mathbf{u}\times(\mathbf{v}\times\mathbf{w}) &= (u_1\mathbf{i}+u_2\mathbf{j}+u_3\mathbf{k})\times\big((v_2w_3-v_3w_2)\mathbf{i}+(v_3w_1-v_1w_3)\mathbf{j}\\ &\qquad+(v_1w_2-v_2w_1)\big)\mathbf{k}\\ &= (u_2v_1w_2-u_2v_2w_1-u_3v_3w_1+u_3v_1w_3)\mathbf{i}\\ &\qquad+(u_3v_2w_3-u_3v_3w_2-u_1v_1w_2+u_1v_2w_1)\mathbf{j}\\ &\qquad+(u_1v_3w_1-u_1v_1w_3-u_2v_2w_3+u_2v_3w_2)\mathbf{k}\\ &= (u_1w_1+u_2w_2+u_3w_3)(v_1\mathbf{i}+v_2\mathbf{j}+v_3\mathbf{k})\\ &\qquad-(u_1v_1+u_2v_2+u_3v_3)(w_1\mathbf{i}+w_2\mathbf{j}+w_3\mathbf{k})\\ &= (\mathbf{u}\cdot\mathbf{w})\mathbf{v}-(\mathbf{u}\cdot\mathbf{v})\mathbf{w}.\end{aligned}$$

x) seuraa muista kohdista:

$$\begin{aligned}\|\mathbf{u}\times\mathbf{v}\|^2 &= (\mathbf{u}\times\mathbf{v})\cdot(\mathbf{u}\times\mathbf{v}) \overset{\text{vii}}{=} \mathbf{u}\cdot[\mathbf{v}\times(\mathbf{u}\times\mathbf{v})]\\ &\overset{\text{ix}}{=} \mathbf{u}\cdot[(\mathbf{v}\cdot\mathbf{v})\mathbf{u}-(\mathbf{v}\cdot\mathbf{u})\mathbf{v}] = (\mathbf{u}\cdot\mathbf{u})(\mathbf{v}\cdot\mathbf{v})-(\mathbf{v}\cdot\mathbf{u})(\mathbf{u}\cdot\mathbf{v})\\ &= \|\mathbf{u}\|^2\|\mathbf{v}\|^2-(\mathbf{u}\cdot\mathbf{v})^2. \quad \square\end{aligned}$$

Seuraus 3.5.5. a) $\mathbf{u}\perp(\mathbf{u}\times\mathbf{v})$, $\quad \mathbf{v}\perp(\mathbf{u}\times\mathbf{v})$.
b) $\|\mathbf{u}\times\mathbf{v}\| = \|\mathbf{u}\|\|\mathbf{v}\|\sin\theta$, $\quad \theta=\sphericalangle(\mathbf{u},\mathbf{v})\in[0,\pi]$, $\quad$ *kun* $\mathbf{u}\neq\mathbf{0}\neq\mathbf{v}$.

Todistus. a) 3.5.4 vii):n nojalla on

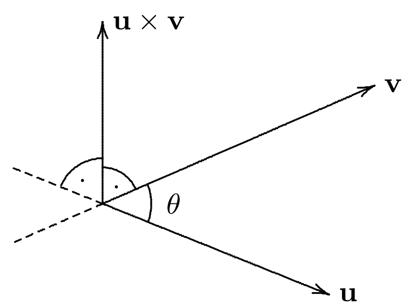
$$\begin{aligned}\mathbf{u}\cdot(\mathbf{u}\times\mathbf{v}) &= (\mathbf{u}\times\mathbf{u})\cdot\mathbf{v} = \mathbf{0}\cdot\mathbf{v} = 0,\\ \mathbf{v}\cdot(\mathbf{u}\times\mathbf{v}) &= (\mathbf{u}\times\mathbf{v})\cdot\mathbf{v} = \mathbf{u}\cdot(\mathbf{v}\times\mathbf{v}) = \mathbf{u}\cdot\mathbf{0} = 0.\end{aligned}$$

b) Koska $\mathbf{u}\cdot\mathbf{v} = \|\mathbf{u}\|\|\mathbf{v}\|\cos\theta$, on 3.5.4 x):n nojalla

$$\|\mathbf{u}\times\mathbf{v}\|^2 = \|\mathbf{u}\|^2\|\mathbf{v}\|^2(1-\cos^2\theta) = \|\mathbf{u}\|^2\|\mathbf{v}\|^2\sin^2\theta.$$

Koska $\theta\in[0,\pi]$, on $\sin\theta\geq 0$, joten

$$\|\mathbf{u}\times\mathbf{v}\| = \|\mathbf{u}\|\|\mathbf{v}\|\sin\theta. \quad \square$$



Lause 3.5.6. $\mathbf{u}\times\mathbf{v}\neq\mathbf{0} \iff (\mathbf{u},\mathbf{v})$ *on vapaa. Tällöin* $(\mathbf{u}\times\mathbf{v})$ *on* $\operatorname{span}(\mathbf{u},\mathbf{v})^{\perp}$*:n kanta ja* $(\mathbf{u},\mathbf{v},\mathbf{u}\times\mathbf{v})$ *on* $\mathbb{R}^3$*:n kanta.*

Todistus. " $\Longrightarrow$ ". Jos $(\mathbf{u},\mathbf{v})$ on sidottu, niin $\mathbf{u}=a\mathbf{v}$ tai $\mathbf{v}=b\mathbf{u}$, missä $a,b\in\mathbb{R}$. Siten $\mathbf{u}\times\mathbf{v}=a(\mathbf{v}\times\mathbf{v})=\mathbf{0}$ tai $\mathbf{u}\times\mathbf{v}=b(\mathbf{u}\times\mathbf{u})=\mathbf{0}$.

" $\Longleftarrow$ ". Jos $(\mathbf{u},\mathbf{v})$ on vapaa, niin $\mathbf{u}\neq\mathbf{0}\neq\mathbf{v}$ ja $\mathbf{u}\nparallel\mathbf{v}$. Siten $\|\mathbf{u}\|>0$, $\|\mathbf{v}\|>0$ ja $\theta=\sphericalangle(\mathbf{u},\mathbf{v})\in\,]0,\pi[$, jolloin $\|\mathbf{u}\times\mathbf{v}\|=\|\mathbf{u}\|\|\mathbf{v}\|\sin\theta>0$. Siis $\mathbf{u}\times\mathbf{v}\neq\mathbf{0}$.

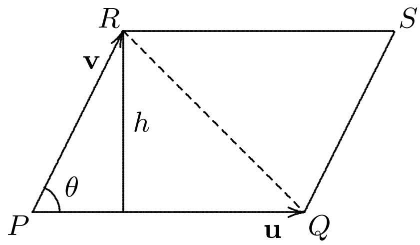
Olkoon $(\mathbf{u},\mathbf{v})$ vapaa. Merkitään $W=\operatorname{span}(\mathbf{u},\mathbf{v})$. Koska $\dim(W)=2$, on lauseen 3.4.5 c) nojalla $\dim(W^{\perp})=\dim(\mathbb{R}^3)-\dim(W)=1$. Koska toisaalta $\mathbf{u}\times\mathbf{v}\in W^{\perp}$ (lause 3.5.5 a) ja $\mathbf{u}\times\mathbf{v}\neq\mathbf{0}$, on $(\mathbf{u}\times\mathbf{v})$ on $W^{\perp}$:n kanta. Kuten lauseen 3.4.5 c) todistuksessa, voidaan päätellä, että $(\mathbf{u},\mathbf{v},\mathbf{u}\times\mathbf{v})$ on $\mathbb{R}^3$:n kanta. □

Geometrisia sovelluksia.

Sovellus 3.5.7. *Kolmion ja suunnikkaan ala.* Olkoot $P,Q,R,S\in\mathbb{R}^3$, $\mathbf{u}=\overrightarrow{PQ}$, $\mathbf{v}=\overrightarrow{PR}$, $\mathbf{u}+\mathbf{v}=\overrightarrow{PS}$. Suunnikkaan $PQSR$ pinta-ala on

$$|PQ|h=\|\mathbf{u}\|\|\mathbf{v}\|\sin\theta\overset{3.5.5}{=}\|\mathbf{u}\times\mathbf{v}\|.$$

Kolmion PQR pinta-ala $=\frac{1}{2}\|\mathbf{u}\times\mathbf{v}\|$. □

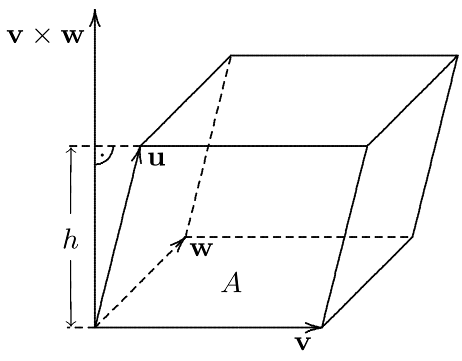


Esimerkki 3.5.8. Olkoon $P=(2,2,4)$, $Q=(-1,0,5)$ ja $R=(3,4,3)$. Tällöin $\mathbf{u}=\overrightarrow{PQ}=-3\mathbf{i}-2\mathbf{j}+\mathbf{k}$, $\mathbf{v}=\overrightarrow{PR}=\mathbf{i}+2\mathbf{j}-\mathbf{k}$ ja $\mathbf{u}\times\mathbf{v}=-2\mathbf{j}-4\mathbf{k}$; kolmion PQR ala on

$$\frac{1}{2}\|\mathbf{u}\times\mathbf{v}\|=\frac{1}{2}\|-2\mathbf{j}-4\mathbf{k}\|=\|\mathbf{j}+2\mathbf{k}\|=\sqrt{1^2+2^2}=\sqrt{5}.$$

Sovellus 3.5.9. *Suuntaissärmiön ja tetraedrin tilavuus.* Vektorien $\mathbf{u},\mathbf{v},\mathbf{w}\in\mathbb{R}^3$ virittämän suuntaissärmiön tilavuus on

$$Ah=\|\mathbf{v}\times\mathbf{w}\|\cdot\|\mathbf{u}\|\cdot|\cos\sphericalangle(\mathbf{u},\mathbf{v}\times\mathbf{w})|=|\mathbf{u}\cdot(\mathbf{v}\times\mathbf{w})|.$$



Ko. vektorien virittämän tetraedrin tilavuus on

$$\frac{1}{3} \cdot (\text{pohjakolmion ala}) \cdot h = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} A \cdot h = \frac{1}{6} |\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{w})|. \quad \square$$

Esimerkki 3.5.10. Olkoon $\mathbf{u} = \mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$, $\mathbf{v} = \mathbf{i} + 3\mathbf{j} + \mathbf{k}$ ja $\mathbf{w} = 2\mathbf{i} + \mathbf{j} + 2\mathbf{k}$. Tällöin $\mathbf{v} \times \mathbf{w} = 5\mathbf{i} - 5\mathbf{k}$ ja $\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{w}) = -10$. Suuntaissärmiön tilavuus on siis $= |\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{w})| = |-10| = 10$.

Sovellus 3.5.11. *Tason normaali.* Olkoot $\mathbf{p}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbb{R}^3$, $\mathbf{v} \nparallel \mathbf{w}$. Lauseen 3.5.6 nojalla tason

$$T = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \mid \mathbf{x} = \mathbf{p} + s\mathbf{v} + t\mathbf{w},\ s, t \in \mathbb{R}\}$$

eräs normaali on $\mathbf{v} \times \mathbf{w}$; T:n normaalimuotoinen yhtälö on siis $(\mathbf{v} \times \mathbf{w}) \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{p}) = 0$ (vrt. 3.4.10 a). $\square$

Esimerkki 3.5.12. Pisteiden $P = (2, -2, 1)$, $Q = (-1, 0, 3)$ ja $R = (5, -3, 4)$ kautta kulkevan tason T eräs normaali on

$$\overrightarrow{PQ} \times \overrightarrow{PR} = (-3\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 2\mathbf{k}) \times (3\mathbf{i} - \mathbf{j} + 3\mathbf{k}) = 8\mathbf{i} + 15\mathbf{j} - 3\mathbf{k}.$$

T:n normaalimuotoinen yhtälö on siten $(8\mathbf{i} + 15\mathbf{j} - 3\mathbf{k}) \cdot (\mathbf{x} - \overrightarrow{OP}) = 0$ eli

$$8(x_1 - 2) + 15(x_2 + 2) - 3(x_3 - 1) = 0 \quad \text{eli} \quad 8x_1 + 15x_2 - 3x_3 + 17 = 0.$$

Sovellus 3.5.13. *Pisteen etäisyys suorasta.* Olkoot $P, Q \in \mathbb{R}^3$, $\overrightarrow{OP} = \mathbf{p}$, $\overrightarrow{OQ} = \mathbf{q}$, ja $\mathbf{w} \in \mathbb{R}^3$, $\mathbf{w} \neq \mathbf{0}$. Merkitään $W = \operatorname{span}(\mathbf{w})$ ja

$$\ell = \mathbf{p} + W = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \mid \mathbf{x} = \mathbf{p} + t\mathbf{w},\ t \in \mathbb{R}\}.$$

Pisteen Q etäisyys suorasta ℓ on

$$d(Q, \ell) = d(\mathbf{q}, \mathbf{p} + W) = d(\mathbf{q} - \mathbf{p}, W).$$

Esimerkin 3.4.8 a) nojalla

$$d(\mathbf{q} - \mathbf{p}, W)^2 = \frac{\|\mathbf{q} - \mathbf{p}\|^2 \|\mathbf{w}\|^2 - ((\mathbf{q} - \mathbf{p}) \cdot \mathbf{w})^2}{\|\mathbf{w}\|^2} \overset{3.5.4\,x}{=} \frac{\|(\mathbf{q} - \mathbf{p}) \times \mathbf{w}\|^2}{\|\mathbf{w}\|^2},$$

joten

$$d(Q, \ell) = \frac{\|(\mathbf{q} - \mathbf{p}) \times \mathbf{w}\|}{\|\mathbf{w}\|}. \quad \square$$

Yhtälöryhmän pienimmän neliösumman ratkaisut.

Olkoon $A = [a_{ij}] \in \mathbb{R}^{m \times n}$ $m \times n$-matriisi ja $\mathbf{b} = [\,b_1 \quad b_2 \quad \dots \quad b_m\,]^T \in \mathbb{R}^m$ sarakevektori. Tarkastellaan jälleen kerran lineaarista yhtälöryhmää

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b}. \tag{3.6.1}$$

Olkoon $W = \mathrm{Col}(A) \subset \mathbb{R}^m$ matriisin A sarakeavaruus; siis

$$W = \{A\mathbf{x} \mid \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n\} = \{x_1\mathbf{a}_1 + \cdots + x_n\mathbf{a}_n \mid x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}\},$$

missä $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n \in \mathbb{R}^m$ ovat A:n sarakkeet.

Yhtälöryhmällä 3.6.1 on ratkaisuja (eli yhtälöryhmä on *ratkeava*) täsmälleen silloin, kun $\mathbf{b} \in W$. Tällöin jokaisella 3.6.1:n ratkaisulla $\mathbf{x}$ on $\|A\mathbf{x} - \mathbf{b}\| = 0$ (tässä käytetään $\mathbb{R}^m$:n tavallista, pistetulon määräämää normia), ja muilla $\mathbb{R}^n$:n vektoreilla $\mathbf{x}$ on $\|A\mathbf{x} - \mathbf{b}\| > 0$. Jos 3.6.1 ei ole ratkeava, ts. $\mathbf{b} \notin W$, on $\|A\mathbf{x} - \mathbf{b}\| > 0$ kaikilla $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$. Tässä tilanteessa kannattaa tarkkojen ratkaisujen puuttuessa usein etsiä mahdollisimman hyviä 3.6.1:n "likimääräisiä" ratkaisuja, so. sellaisia vektoreita $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, että etäisyys $\|A\mathbf{x} - \mathbf{b}\|$ on mahdollisimman pieni.

Huomautus 3.6.2. Merkitään $A\mathbf{x} = \mathbf{y} = [\,y_1 \quad y_2 \quad \dots \quad y_m\,]^T \in \mathbb{R}^m$. Lausekkeen $\|A\mathbf{x} - \mathbf{b}\|$ minimoiminen merkitsee *neliösumman*

$$\|A\mathbf{x} - \mathbf{b}\|^2 = \|\mathbf{y} - \mathbf{b}\|^2 = (y_1 - b_1)^2 + \cdots + (y_m - b_m)^2$$

pienimmän mahdollisen arvon etsimistä.

Määritelmä 3.6.3. Vektori $\hat{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^n$ on yhtälöryhmän 3.6.1 *pienimmän neliösumman ratkaisu*, jos

$$\|A\hat{\mathbf{x}} - \mathbf{b}\| = \min\{\|A\mathbf{x} - \mathbf{b}\| \mid \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n\}.$$

Huomautus 3.6.4. a) Yleensä 3.6.1:n "pienimmän neliösumman ratkaisu" $\hat{\mathbf{x}}$ ei siis ole "ratkaisu" tavallisessa mielessä, vaan $\|A\hat{\mathbf{x}} - \mathbf{b}\| > 0$.

b) Jos 3.6.1 on ratkeava, sen pienimmän neliösumman ratkaisut ovat samat kuin tavalliset ratkaisut, nimittäin ne vektorit $\mathbf{x}$, joilla $\|A\mathbf{x} - \mathbf{b}\| = 0$.

Olkoon $\hat{\mathbf{b}} = \mathrm{proj}_W(\mathbf{b}) \in W$ vektorin $\mathbf{b}$ kohtisuora projektio avaruudelle $W = \mathrm{Col}(A)$. Koska siis $\hat{\mathbf{b}} \in W$, yhtälöryhmä $A\mathbf{x} = \hat{\mathbf{b}}$ on ratkeava. Olkoon $\hat{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^n$ jokin tämän yhtälöryhmän ratkaisu, ts. $A\hat{\mathbf{x}} = \hat{\mathbf{b}}$. Tällöin siis $A\hat{\mathbf{x}}$ on $\mathbf{b}$:n kohtisuora projektio W:lle, joten 3.4.6:n mukaan

$$\|A\hat{\mathbf{x}} - \mathbf{b}\| = \min\{\|\mathbf{w} - \mathbf{b}\| \mid \mathbf{w} \in W\} = \min\{\|A\mathbf{x} - \mathbf{b}\| \mid \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n\},$$

ts. $\hat{\mathbf{x}}$ on 3.6.1:n pienimmän neliösumman ratkaisu. Jos taas $\hat{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^n$ ei ole yhtälöryhmän $A\mathbf{x} = \hat{\mathbf{b}}$ ratkaisu, vaan $A\mathbf{x} \neq \hat{\mathbf{b}}$, on kaavaa 3.4.6 edeltävän tarkastelun nojalla $\|A\hat{\mathbf{x}} - \mathbf{b}\| > \|\hat{\mathbf{b}} - \mathbf{b}\|$, joten $\hat{\mathbf{x}}$ ei ole 3.6.1:n pienimmän neliösumman ratkaisu.

Olemme nyt todistaneet, että $\hat{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^n$ on yhtälöryhmän 3.6.1 pienimmän neliösumman ratkaisu täsmälleen silloin, kun $A\hat{\mathbf{x}} = \mathrm{proj}_W(\mathbf{b})$, ja tällaisia vektoreita $\hat{\mathbf{x}}$ on olemassa. Kohtisuoran projektion määritelmän nojalla on

$$\begin{aligned} A\hat{\mathbf{x}} = \mathrm{proj}_W(\mathbf{b}) &\iff A\hat{\mathbf{x}} - \mathbf{b} \in W^\perp = \mathrm{Col}(A)^\perp \\ &\overset{3.4.4}{\iff} A^T(A\hat{\mathbf{x}} - \mathbf{b}) = \mathbf{0} \iff A^TA\hat{\mathbf{x}} = A^T\mathbf{b}. \end{aligned}$$

Lause 3.6.5. *Yhtälöryhmällä* 3.6.1 *on aina pienimmän neliösumman ratkaisuja. Vektori* $\hat{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^n$ *on* 3.6.1*:n pienimmän neliösumman ratkaisu täsmälleen silloin, kun*

$$A^TA\hat{\mathbf{x}} = A^T\mathbf{b}. \quad \square$$

Yhtälöryhmä $A^TA\mathbf{x} = A^T\mathbf{b}$, jonka ratkaisut siis ovat 3.6.1:n pienimmän neliösumman ratkaisut, on nimeltään yhtälöryhmään 3.6.1 liittyvä *normaaliryhmä*.

Esimerkki 3.6.6. Etsi yhtälöryhmän $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ pienimmän neliösumman ratkaisut, kun

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 11 \end{bmatrix}.$$

Ratkaisu. Koska

$$A^TA = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 17 & 1 \\ 1 & 5 \end{bmatrix} \quad \text{ja} \quad A^T\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 11 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 19 \\ 11 \end{bmatrix},$$

on yhtälöryhmään $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ liittyvä normaaliryhmä

$$\begin{bmatrix} 17 & 1 \\ 1 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 19 \\ 11 \end{bmatrix}.$$

Tällä on yksikäsitteinen ratkaisu $\hat{\mathbf{x}} = [1 \quad 2]^T$, joka siis on yhtälöryhmän $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ ainoa pienimmän neliösumman ratkaisu. $\square$

Esimerkki 3.6.7. Etsi yhtälöryhmän $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ pienimmän neliösumman ratkaisut, kun

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} -3 \\ -1 \\ 0 \\ 2 \\ 5 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Ratkaisu. Laskemalla saadaan tällä kertaa

$$A^T A = \begin{bmatrix} 6 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{ja} \quad A^T \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 4 \\ -4 \\ 2 \\ 6 \end{bmatrix}.$$

Normaaliryhmän

$$\begin{bmatrix} 6 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ -4 \\ 2 \\ 6 \end{bmatrix}$$

täydennetty matriisi on riviekvivalentti porrasmatriisin

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

kanssa, joten normaaliryhmän ratkaisujen koordinaatit saadaan ehdoista $x_1 = 3-t$, $x_2 = -5+t$, $x_3 = -2+t$, $x_4 = t \in \mathbb{R}$. Normaaliryhmän ratkaisut eli yhtälöryhmän $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ pienimmän neliösumman ratkaisut ovat siis

$$\hat{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 3 \\ -5 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad (t \in \mathbb{R}). \quad \square$$

Huomautus 3.6.8. Lauseen 3.6.5 todistus antaa uuden keinon projektiovektorin $\mathrm{proj}_W(\mathbf{b})$ laskemiseksi, kun $W = \mathrm{Col}(A)$: Etsitään jokin normaaliryhmän $A^T A\mathbf{x} = A^T\mathbf{b}$ ratkaisu $\hat{\mathbf{x}}$; tällöin $\mathrm{proj}_W(\mathbf{b}) = A\hat{\mathbf{x}}$.

Kuten esimerkki 3.6.7 osoittaa, yhtälöryhmällä 3.6.1 voi olla useita pienimmän neliösumman ratkaisuja. Jos kuitenkin $n \times n$-matriisi $A^T A$ on säännöllinen, normaaliryhmällä $A^T A\mathbf{x} = A^T\mathbf{b}$ on yksikäsitteinen ratkaisu

$$\hat{\mathbf{x}} = (A^T A)^{-1} A^T \mathbf{b},$$

joka tällöin on 3.6.1:n ainoa pienimmän neliösumman ratkaisu.

Seuraava tulos kertoo, milloin $A^T A$ on säännöllinen:

Lause 3.6.9. *Matriisi* A^TA *on säännöllinen, jos ja vain jos* $\operatorname{rank}(A) = n$ *(eli A:n sarakkeet ovat lineaarisesti riippumattomat).*

Todistus. " $\Longrightarrow$ ". Oletetaan, että A^TA on säännöllinen. Olkoot $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$ sellaisia, että $x_1\mathbf{a}_1 + \cdots + x_n\mathbf{a}_n = \mathbf{0}$, missä $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n$ ovat A:n sarakkeet kuten edelläkin. Tällöin vektorilla $\mathbf{x} = [\,x_1 \quad \ldots \quad x_n\,]^T$ pätee $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$, joten myös $\mathbf{x} = (A^TA)^{-1}(A^TA)\mathbf{x} = (A^TA)^{-1}A^T(A\mathbf{x}) = (A^TA)^{-1}A^T\mathbf{0} = \mathbf{0}$ eli $x_1 = \cdots = x_n = 0$. Näin ollen sarakkeet $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n$ ovat lineaarisesti riippumattomat.

" $\Longleftarrow$ ". Oletetaan, että A:n sarakkeet ovat lineaarisesti riippumattomat. On osoitettava, että matriisi A^TA on säännöllinen, jota varten riittää lauseen 1.6.5 kohdan iii) nojalla näyttää, että homogeenisella yhtälöryhmällä $A^TA\mathbf{x} = \mathbf{0}$ on vain triviaali ratkaisu. Olkoon siis $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ sellainen, että $A^TA\mathbf{x} = \mathbf{0}$. Tällöin myös

$$0 = \mathbf{x}^TA^TA\mathbf{x} = (A\mathbf{x})^T(A\mathbf{x}) = (A\mathbf{x}) \cdot (A\mathbf{x}) = \|A\mathbf{x}\|^2,$$

mistä seuraa, että $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$. Tämä merkitsee sitä, että $x_1\mathbf{a}_1 + \cdots + x_n\mathbf{a}_n = \mathbf{0}$. Koska A:n sarakkeet $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n$ ovat lineaarisesti riippumattomat, saadaan $x_1 = \cdots = x_n = 0$ eli $\mathbf{x} = \mathbf{0}$, kuten pitikin. $\square$

Varoitus 3.6.10. Lauseen 3.6.9 tilanteessa matriisit A ja A^T eivät yleensä ole säännöllisiä, eivätkä edes neliömatriiseja (vaan tavallisesti $m > n$). Niinpä ei esimerkiksi pidä erehtyä käyttämään kaavaa $(A^TA)^{-1} = A^{-1}(A^T)^{-1}$, joka tässä yhteydessä on mieletön.

Suoran sovittaminen pistejoukkoon.

Tarkastellaan suuretta y, joka käytettävän matemaatisen mallin mukaan riippuu suureesta t lineaarisesti, ts. $y = x_1 + x_2t$ kaikilla $t \in \mathbb{R}$, missä $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ ovat vakioita. Oletetaan, että mittaamalla on t:n arvoja $t_1, t_2, \ldots, t_m$ vastaamaan saatu y:n arvot $y_1, y_2, \ldots, y_m$. Mallin mukaan pisteiden (t_1, y_1),. . . ,(t_m, y_m) pitäisi tällöin sijaita suoralla $y = x_1 + x_2t$ sopivalla kertoimien x_1, x_2 valinnalla, mutta mittausvirheistä yms. johtuen kertoimille x_1, x_2 ei voida yleensä löytää sellaisia arvoja, että vastaava suora tosiaan kulkisi kaikkien pisteiden (t_i, y_i) kautta.

Yllä kuvatussa tilanteessa kannattaa etsiä suoraa $y = x_1 + x_2t$, jolla mitatut arvot y_i poikkeavat ennustetuista arvoista $x_1 + x_2t_i$ mahdollisimman vähän, ja tässä tulkitaan yleensä, että "mahdollisimman vähän" tarkoittaa lausekkeen

$$\sum_{i=1}^{m}[y_i - (x_1 + x_2t_i)]^2$$

pienimmän arvon etsimistä. Kysymys on siis siitä, että etsitään pienimmän neliösumman ratkaisua $\hat{\mathbf{x}} = [\,\hat{x}_1 \quad \hat{x}_2\,]$ yhtälöryhmälle $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, missä

$$A = \begin{bmatrix} 1 & t_1 \\ 1 & t_2 \\ \vdots & \vdots \\ 1 & t_m \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \quad \text{ja} \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{bmatrix}.$$

Suoraa $y = \hat{x}_1 + \hat{x}_2 t$ kutsutaan tällöin pistejoukkoon $\{(t_i, y_i) \mid i = 1, \dots, m\}$ sovitetuksi *pienimmän neliösumman suoraksi* (tai *regressiosuoraksi*).

Esimerkki 3.6.11. Sovita pienimmän neliösumman suora $y = x_1 + x_2 t$ pistejoukkoon $\{(2,1),(5,2),(7,3),(8,3)\}$.

Ratkaisu. On etsittävä pienimmän neliösumman ratkaisua yhtälöryhmälle $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, missä

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 5 \\ 1 & 7 \\ 1 & 8 \end{bmatrix} \quad \text{ja} \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

Laskemalla $A^T A$ ja $A^T \mathbf{b}$ nähdään, että normaaliryhmä $A^T A\mathbf{x} = A^T \mathbf{b}$ on

$$\begin{bmatrix} 4 & 22 \\ 22 & 142 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 \\ 57 \end{bmatrix}.$$

Tämän ratkaisuna saadaan pienimmän neliösumman ratkaisu $\hat{\mathbf{x}} = [\,2/7 \quad 5/14\,]$. Pienimmän neliösumman suoran yhtälö on siis

$$y = \frac{2}{7} + \frac{5}{14}t.$$

Yleisemmin voidaan pistejoukkoon $\{(t_i, y_i) \mid i = 1, \dots, m\}$ yrittää sovittaa polynomifunktion

$$y = x_1 + x_2 t + x_3 t^2 + \cdots + x_n t^{n-1}$$

kuvaajaa, tai vielä yleisemmin käyrää

$$y = x_1 f_1(t) + x_2 f_2(t) + \cdots + x_n f_n(t),$$

missä $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}$ ovat määritettäviä kertoimia ja $f_1, \dots, f_n$ annettuja t:n funktioita. Tällöin on etsittävä pienimmän neliösumman ratkaisuja yhtälöryhmälle $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, missä

$$A = \begin{bmatrix} f_1(t_1) & f_2(t_1) & \dots & f_n(t_1) \\ f_1(t_2) & f_2(t_2) & \dots & f_n(t_2) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ f_1(t_m) & f_2(t_m) & \dots & f_n(t_m) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \quad \text{ja} \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{bmatrix}.$$