1. LINEAARISET YHTÄLÖRYHMÄT JA MATRIISIT

1.1 Lineaariset yhtälöryhmät

Muotoa

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = b \tag{1}$$

oleva yhtälö on *tuntemattomien* $x_1, \ldots, x_n$ *lineaarinen yhtälö*, jonka *kertoimet* ovat luvut $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ ja *vakio* on $b \in \mathbb{R}$. (1):n *ratkaisut* ovat ne reaalilukujonot $(s_1, \ldots, s_n)$, joilla (1) toteutuu, kun sijoitetaan $x_1 = s_1, \ldots, x_n = s_n$.

Esimerkki 1.1.1. a) Yhtälön $6x_1 - 3x_2 + 4x_3 = -13$ eräs ratkaisu on $x_1 = 2$, $x_2 = 3$, $x_3 = -4$.
b) Tapaus $n = 2$: Tuntemattomia merkitään usein symboleilla x ja y. Yhtälön $a_1x + a_2y = b$ ($a_1 \neq 0$ tai $a_2 \neq 0$) ratkaisut muodostavat *suoran* xy*-tasossa* (tästä nimitys "lineaarinen").

Äärellinen jono tuntemattomien $x_1, \ldots, x_n$ lineaarisia yhtälöitä

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}\,x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}\,x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \quad\vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad\qquad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \tag{2}$$

on *lineaarinen yhtälöryhmä* (tässä on m yhtälöä ja n tuntematonta; $m \geq 1$, $n \geq 1$), jonka *kertoimet* ovat $a_{ij} \in \mathbb{R}$ ($1 \leq i \leq m$, $1 \leq j \leq n$) ja vakiot b_i ($1 \leq i \leq m$). (2):n i:s yhtälö $a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n = b_i$ kirjoitetaan joskus muodossa $L_i = 0$, missä $L_i = a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n - b_i$.

Lukujono $(s_1, \ldots, s_n)$ on (2):n *ratkaisu*, jos se on (2):n jokaisen yhtälön ratkaisu.

Yhtälöryhmä (2) on *homogeeninen*, jos $b_1 = \cdots = b_n = 0$. Homogeenisella yhtälöryhmällä on aina *triviaali ratkaisu* $x_1 = \cdots = x_n = 0$. Homogeenisen yhtälöryhmän ratkaisu, jossa jokin $x_i \neq 0$, on *epätriviaali*.

Kaksi tuntemattomien $x_1, \ldots, x_n$ yhtälöryhmää ovat *ekvivalentit*, jos niillä on täsmälleen samat ratkaisut, so. sama ratkaisujoukko. Tämä tarkoittaa sitä, että jokainen ensimmäisen yhtälöryhmän ratkaisu on myös toisen ratkaisu, ja kääntäen, jokainen toisen yhtälöryhmän ratkaisu on myös ensimmäisen ratkaisu.

Yhtälöryhmän (2) *ratkaiseminen* tarkoittaa sen kaikkien ratkaisujen (ts. ratkaisujoukon) määrittämistä.

Strategia: Muodostetaan (2):n kanssa ekvivalentteja yhtälöryhmiä, joista ratkaisu voidaan helpommin lukea.

Seuraavat esimerkit 1.1.2. (a)–(e) on tarkoitettu johdatukseksi lineaaristen yhtälöryhmien ratkaisemiseen. Systemaattinen ratkaisumenetelmä esitetään kappaleessa 1.5.

Esimerkki 1.1.2.

(a)
$$\begin{cases} x_1 - 3x_2 = -7 \\ 2x_1 + x_2 = 7 \end{cases} \underset{(1)}{\Longleftrightarrow} \begin{cases} x_1 - 3x_2 = -7 \\ 7x_2 = 21 \end{cases} \underset{(2)}{\Longleftrightarrow} \begin{cases} x_1 - 3x_2 = -7 \\ x_2 = 3 \end{cases}$$

$$\underset{(3)}{\Longleftrightarrow} \begin{cases} x_1 = -7 + 3x_2 \\ x_2 = 3 \end{cases} \underset{(4)}{\Longleftrightarrow} \begin{cases} x_1 = 2 \\ x_2 = 3. \end{cases}$$

Yhtälöryhmällä on siis täsmälleen yksi ratkaisu, nimittäin $(x_1, x_2) = (2, 3)$.

Selitykset:

(1) Alempaan yhtälöön lisätään ylempi yhtälö kerrottuna puolittain puolittain luvulla -2, jolloin saadaan eliminoitua tuntematon x_1 alemmasta yhtälöstä.

(2) Alempi yhtälö kerrotaan puolittain luvulla $\frac{1}{7}$, jolloin saadaan ratkaistua tuntematon x_2 alemmasta.

(3) Ylemmästä yhtälöstä ratkaistaan tuntematon x_1 tuntemattoman x_2 avulla.

(4) Sijoitetaan $x_2 = 3$ ylempään, jolloin saadaan x_1.

Usein esitystä on tapana pelkistää yhdistämällä itsestään selviä välivaiheita. Esimerkiksi vaiheet (2), (3) ja (4) voidaan yhdistää:

$$\begin{cases} x_1 - 3x_2 = -7 \\ 2x_1 + x_2 = 7 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} x_1 - 3x_2 = -7 \\ 7x_2 = 21 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} x_1 = -7 + 3x_2 = 2 \\ x_2 = 3 \end{cases}$$

. . . .

(b)
$$\begin{cases} 8x_1 - 3x_2 = 7 \\ 3x_1 - 2x_2 = 0 \\ 10x_1 - 2x_2 = 14 \end{cases} \underset{(1)}{\Longleftrightarrow} \begin{cases} -7x_1 = -14 \\ -7x_1 = -14 \\ 10x_1 - 2x_2 = 14 \end{cases} \underset{(2)}{\Longleftrightarrow} \begin{cases} x_1 = 2 \\ x_2 = 5x_1 - 7 = 3. \end{cases}$$

Saatiin siis yksikäsitteinen ratkaisu $(x_1, x_2) = (2, 3)$. Koska ratkaisu on sama kuin kohdassa (a), kyseiset yhtälöryhmät ovat ekvivalentit.

Selitykset:

(1) Toiseen yhtälöön lisätään kolmas yhtälö kerrottuna puolittain luvulla -1, jolloin saadaan eliminoitua tuntematon x_2 toisesta yhtälöstä. Vastaavasti ensimmäiseen

yhtälöön lisätään kolmas yhtälö puolittain luvulla $-\frac{3}{2}$ kerrottuna, jolloin saadaan eliminoitua tuntematon x_2 ensimmäisestä yhtälöstä.

(2) Koska ensimmäinen ja toinen yhtälö ovat samoja, voidaan toinen niistä pudottaa pois. Kerrotaan ensimmäinen yhtälö luvulla $-\frac{1}{7}$, jolloin kyseisestä yhtälöstä saadaan $x_1 = 2$. Ratkaistaan kolmannesta yhtälöstä x_2 x_1:n avulla ja sijoitetaan $x_1 = 2$, jolloin saadaan $x_2 = 3$.

. . . .

(c)
$$\begin{cases} x_1 - 3x_2 &= -7 \\ 2x_1 - 6x_2 &= 7 \end{cases} \underset{(1)}{\iff} \begin{cases} x_1 - 3x_2 &= -7 \\ 0 &= 21. \end{cases}$$

Koska yhtälö $0 = 21$ ei toteudu millään parilla (x_1, x_2), yhtälöparilla ei ole ratkaisua.

Selitykset:

(1) Lisätään alempaan yhtälöön ylempi yhtälö kerrottuna puolittain luvulla -2, jolloin saadaan eliminoitua alemmasta tuntematon x_1. Osoittautuu, että samalla eliminoituu myös tuntematon x_2.

. . . .

(d)
$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 6 \\ 2x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 14 \\ 3x_1 + x_2 - x_3 = -2 \end{cases} \underset{(1)}{\iff} \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 6 \\ - 7x_2 - 4x_3 = 2 \\ - 5x_2 - 10x_3 = -20 \end{cases} \underset{(2)}{\iff}$$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 6 \\ - 7x_2 - 4x_3 = 2 \\ x_2 + 2x_3 = 4 \end{cases} \underset{(3)}{\iff} \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 6 \\ x_2 + 2x_3 = 4 \\ - 7x_2 - 4x_3 = 2 \end{cases} \underset{(4)}{\iff}$$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 6 \\ x_2 + 2x_3 = 4 \\ 10x_3 = 30 \end{cases} \underset{(5)}{\iff} \begin{cases} x_1 = 6 - x_2 - 3x_3 = 1 \\ x_2 = 4 - 2x_3 = -2 \\ x_3 = 3. \end{cases}$$

Saatiin yksikäsitteinen ratkaisu $(x_1, x_2, x_3) = (1, -2, 3)$.

Selitykset:

(1) Eliminoidaan tuntematon x_1 toisesta yhtälöstä lisäämällä toiseen yhtälöön ensimmäinen yhtälö luvulla -2 kerrottuna. Vastaavasti eliminoidaan x_1 kolmannesta yhtälöstä lisäämällä kolmanteen yhtälöön ensimmäinen yhtälö luvulla -3 kerrottuna.

(2) Sievennetään kolmas yhtälö kertomalla se puolittain luvulla $-\frac{1}{5}$.

(3) Vaihdetaan keskenään toinen ja kolmas yhtälö

(4) Eliminoidaan tuntematon x_2 (uudesta) kolmannesta yhtälöstä lisäämällä (uusi) toinen yhtälö luvulla 7 kerrottuna kolmanteen yhtälöön.

(5) Ratkaistaan tuntematon x_3 kolmannesta yhtälöstä kertomalla kyseinen yhtälö puolittain luvulla $\frac{1}{10}$; saadaan $x_3 = 3$. Ratkaistaan toisesta yhtälöstä tuntematon x_2 tuntemattoman x_3 avulla ja sijoitetaan edellä saatu $x_3 = 3$; saadaan $x_2 = -2$. Ratkaistaan lopuksi ensimmäisestä yhtälöstä tuntematon x_1 tuntemattomien x_2 ja x_3 avulla ja sijoitetaan edellä saadut $x_2 = -2$ ja $x_3 = 3$; saadaan $x_1 = 1$.

. . . .

(e)
$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 = -4 \\ 2x_1 + x_2 - 3x_3 = 4 \end{cases} \underset{(1)}{\Longleftrightarrow} \begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 = -4 \\ \quad - 3x_2 + 3x_3 = 12 \end{cases} \underset{(2)}{\Longleftrightarrow}$$

$$\begin{cases} x_1 = -4 - 2x_2 + 3x_3 = -4 - 2(x_3 - 4) + 3x_3 = x_3 + 4 \\ x_2 = x_3 - 4. \end{cases}$$

Ratkaisut ovat siis $(x_1, x_2, x_3) = (t + 4, t - 4, t)$, missä $x_3 = t \in \mathbb{R}$ on mikä tahansa reaaliluku (parametri); ratkaisuja on ääretön määrä.

Selitykset:

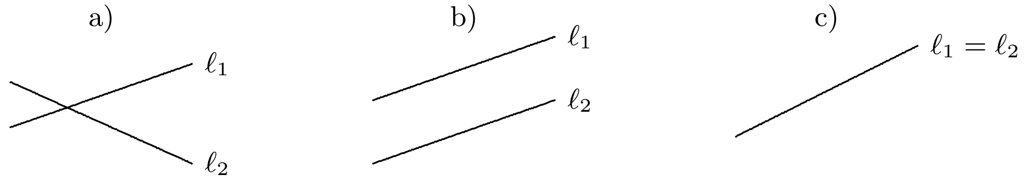
(1) Eliminoidaan muuttuja x_2 alemmasta yhtälöstä lisäämällä alempaan yhtälöön ylempi yhtälö puolittain luvulla -2 kerrottuna.

(2) Ratkaistaan alemmasta yhtälöstä tuntematon x_2 tuntemattoman x_3 avulla ja ylemmästä yhtälöstä tuntematon x_1 tuntemattomien x_2 ja x_3 avulla. Sijoitetaan x_2:n lauseke ylempään yhtälöön, jolloin saadaan x_1 pelkästään x_3:n avulla lausuttuna. Nähdään, että jokaista arvoa $x_3 = t \in \mathbb{R}$ kohti saadaan ratkaisu $(x_1, x_2, x_3) = (t + 4, t - 4, t)$; kaikkiaan näitä rataisuja on ääretön määrä (niiden joukko on ”yhtä mahtava” kuin reaalilukujen t joukko).

Huomautus 1.1.3. Esimerkistä 1.1.2 nähdään, että lineaarisella yhtälöryhmällä voi olla ratkaisuja (ainakin) jokin seuraavista määristä: a) tasan yksi, b) ei yhtään, c) ääretön määrä. Geometrinen tulkinta yhtälöparin

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \qquad (a_{11} \neq 0 \text{ tai } a_{12} \neq 0) \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \qquad (a_{21} \neq 0 \text{ tai } a_{22} \neq 0) \end{cases}$$

tapauksessa: x_1x_2-tason kahden suoran leikkaus on a) piste, b) tyhjä, c) suora



Kuvailemme lopuksi yleisesti ne operaatiot, joilla yhtälöryhmiä esimerkissä 1.1.2 manipuloitiin. Tarkastellaan yhtälöryhmää (2) eli $L_i = 0$, $i = 1, \ldots, m$, missä $L_i = a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n - b_i$. Muodostetaan uusi yhtälöryhmä

$$L_i' = 0, \quad i = 1, \ldots, m, \tag{2'}$$

suorittamalla jokin seuraavista toimituksista:

I. Olkoon $r \neq s$. Määritellään $L_r' = L_s$, $L_s' = L_r$ ja $L_i' = L_i$ kaikilla $i \neq r, s$; siis vaihdetaan (2):n yhtälöt r ja s keskenään.

II. Olkoon $r \in \{1, 2, \ldots, m\}$ ja $c \in \mathbb{R}$, $c \neq 0$. Määritellään $L_r' = c \cdot L_r$ ja $L_i' = L_i$ kaikilla $i \neq r$; siis kerrotaan (2):n yhtälö r (puolittain) vakiolla $c \neq 0$.

III. Olkoon $r, s \in \{1, 2, \ldots, m\}$, $r \neq s$ ja $c \in \mathbb{R}$. Määritellään $L_s' = L_s + c \cdot L_r$ ja $L_i' = L_i$ kaikilla $i \neq s$; siis (2):n yhtälöön s lisätään $c \times$ (yhtälö r).

Lause 1.1.4. *Yhtälöryhmät* (2) *ja* (2') *ovat ekvivalentit.*

Todistus. Tapaus I on selvä.

Tapaus II. Oletetaan, että $L_i = 0$ $\forall i$. Tällöin $L_i' = L_i = 0$ $\forall i \neq r$ ja $L_r' = c \cdot L_r = c \cdot 0 = 0$.

Oletetaan kääntäen, että $L_i' = 0$ $\forall i$. Tällöin $L_i = L_i' = 0$ $\forall i \neq r$ ja $L_r = (1/c) \cdot L_r' = (1/c) \cdot 0 = 0$. (Tässä tarvitaan ehtoa $c \neq 0$!)

Tapaus III. Oletetaan, että $L_i = 0$ $\forall i$. Tällöin $L_i' = L_i = 0$ $\forall i \neq s$ ja $L_s' = L_s + c \cdot L_r = 0 + c \cdot 0 = 0$.

Oletetaan kääntäen, että $L_i' = 0$ $\forall i$. Tällöin $L_i = L_i' = 0$ $\forall i \neq s$ ja $L_s = L_s' - c \cdot L_r = L_s' - c \cdot L_r' = 0 - c \cdot 0 = 0$. □

Myöhemmin selitetään, millaiseen yhtälöryhmään toimituksilla I - III kannattaa pyrkiä.

1.2 Matriisit ja matriisitoimitukset

Kun edellä operoitiin lineaarisilla yhtälöryhmillä, käsiteltiin itse asiassa vain yhtälöryhmien kertoimia ja vakioita; tuntemattomat olivat vain "paikanpitäjinä". Kootaan kertoimet ja vakiot "matriiseiksi".

Määritelmä 1.2.1. Olkoot $m \geq 1$ ja $n \geq 1$ kokonaislukuja. (Reaalinen) $m \times n$-*matriisi* on lukukaavio

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \qquad (a_{ij} \in \mathbb{R} \text{ kaikilla } i, j);$$

reaaliluku $a_{ij} = A(i,j)$ on A:n (i,j)-*alkio*; $1 \times n$-matriisi

$$[\, a_{i1} \quad a_{i2} \quad \cdots \quad a_{in} \,]$$

on A:n i:s *rivi* $(i = 1, 2, \ldots, m)$; $m \times 1$-matriisi

$$\begin{bmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{bmatrix}$$

on A:n j:s *sarake* $(j = 1, 2, \ldots, n)$. Jos $m = n$, A on *neliömatriisi*; tällöin a_{11}, a_{22}, $\ldots$, a_{nn} ovat A:n *lävistäjäalkiot*.

Merkitään $\mathbb{R}^{m\times n}$ = kaikkien (reaalisten) $m \times n$-matriisien joukko; siis

$$A \in \mathbb{R}^{m\times n} \iff A \text{ on } m \times n\text{-matriisi.}$$

Usein merkitään lyhyesti $A = [\, a_{ij} \,]$.

Määritelmä 1.1.2. Matriisit $A = [\, a_{ij} \,]$ ja $B = [\, b_{ij} \,]$ ovat *samankokoiset* jos niillä on yhtä monta riviä ja yhtä monta saraketta (esimerkiksi molemmat ovat $m \times n$-matriiseja).

Edelleen matriisit A ja B ovat *samat*, merkitään $A = B$, jos ne ovat samankokoiset ja $a_{ij} = b_{ij}$ $\forall i, j$.

Esimerkki 1.2.3.

$$[\, 1 \quad 2 \,] \neq \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix};$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & -3 & 4 \\ 0 & -4 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & w \\ 2 & x & 4 \\ y & -4 & z \end{bmatrix} \iff w = -1,\ x = -3,\ y = 0,\ z = 5.$$

Määritelmä 1.2.4 (Yhteenlasku). $m \times n$-matriisien $A = [\, a_{ij} \,]$ ja $B = [\, b_{ij} \,]$ *summa* on $m \times n$-matriisi $A + B = [\, c_{ij} \,]$, missä $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$ $\forall i, j$

Esimerkki 1.2.5.

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & -4 \end{bmatrix} \quad \text{ei ole määritelty (matriisit ovat erikokoiset);}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & -1 & 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1+0 & -2+2 & 3+1 \\ 2+1 & -1+3 & 4-4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 3 & 2 & 0 \end{bmatrix}.$$

Määritelmä 1.2.6 (Skalaarilla kertominen). Jos $A = [\,a_{ij}\,]$ on $m \times n$-matriisi ja $t \in \mathbb{R}$ on skalaari, niin $tA = [\,c_{ij}\,]$ on se $m \times n$-matriisi, jolla $c_{ij} = ta_{ij}\ \forall i, j$.

Esimerkki 1.2.7.

$$(-2) \cdot \begin{bmatrix} 4 & -2 & -3 \\ 7 & -3 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -8 & 4 & 6 \\ -14 & 6 & -4 \end{bmatrix}.$$

Kahden $m \times n$-matriisin *erotus* on

$$A - B = A + (-1)B.$$

Esimerkki 1.2.8.

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & -5 \\ 4 & 2 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 3 & 5 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 4 & -8 \\ 1 & -3 & 3 \end{bmatrix}.$$

Summamerkintä. Kun $a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$, merkitään

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_n = \sum_{i=1}^{n} a_i \in \mathbb{R}.$$

Täsmällisemmin tämä merkintä määritellään rekursiivisesti:

$$\sum_{i=1}^{1} a_i = a_1;$$

$$\sum_{i=1}^{n+1} a_i = \left(\sum_{i=1}^{n} a_i \right) + a_{n+1}.$$

Summausindeksi i on ”sidottu muuttuja”; summa ei riipu sen merkintätavasta:

$$\sum_{i=1}^{n} a_i = \sum_{r=1}^{n} a_r.$$

Laskusääntöjä:

$$\sum_{i=1}^{n} ca_i = c \cdot \sum_{i=1}^{n} a_i.$$

Tapauksessa $n = 2$ kyseessä on osittelulaki $ca_1 + ca_2 = c(a_1 + a_2)$; yleisesti kaava todistetaan induktiolla.

Kaksinkertaisen summan summausjärjestyksen vaihtamissääntö:

$$\sum_{i=1}^{m}\left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\right) = \sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{m} a_{ij}\right).$$

Tapaus $m = n = 2$:

$$\sum_{i=1}^{2}\left(\sum_{j=1}^{2} a_{ij}\right) = \sum_{i=1}^{2}(a_{i1} + a_{i2}) = (a_{11} + a_{12}) + (a_{21} + a_{22}),$$

$$\sum_{j=1}^{2}\left(\sum_{i=1}^{2} a_{ij}\right) = \sum_{j=1}^{2}(a_{1j} + a_{2j}) = (a_{11} + a_{21}) + (a_{12} + a_{22}).$$

Reaalilukujen yhteenlaskun vaihdannaisuudesta ja liitännäisyydestä seuraa, että yllä olevissa yhtälöissä oikealla olevat lausekkeet ovat samat, joten kaksoissummat ovat samat. Yleinen tapaus voidaan todistaa induktiolla. Kysymys on siitä, että matriisin $[\, a_{ij} \,]$ rivisummien summa ja sarakesummien summa ovat yhtäsuuret; molemmat antavat tulokseksi kaikkien lukujen a_{ij} summan.

Määritelmä 1.2.9 (Matriisitulo). $m \times n$-matriisin $A = [\, a_{ij} \,]$ ja $n \times p$-matriisin $B = [\, b_{ij} \,]$ *tulo* on $m \times p$-matriisi $AB = [\, c_{ij} \,]$, jolla

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{in}b_{n,j},$$
$$i \in \{1, \dots, m\},\ j \in \{1, \dots, p\}.$$

Huomautus 1.2.10. AB on määritelty $\iff$ A:n sarakkeiden lukumäärä $=$ B:n rivien lukumäärä.

$$\begin{array}{cc} & \\ i & \begin{bmatrix} \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \end{bmatrix} \end{array} \cdot \begin{array}{c} j \\ \begin{bmatrix} \dots & b_{1j} & \dots \\ \dots & b_{2j} & \dots \\ & \vdots & \\ \dots & b_{nj} & \dots \end{bmatrix} \end{array} = \begin{bmatrix} & \vdots & \\ \dots & c_{ij} & \dots \\ & \vdots & \end{bmatrix}$$

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{in}b_{nj}.$$

Esimerkki 1.2.11.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -2 & 5 \\ 4 & -3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 1\cdot(-2)+2\cdot 4+(-1)\cdot 2 & 1\cdot 5+2\cdot(-3)+(-1)\cdot 1 \\ 3\cdot(-2)+1\cdot 4+4\cdot 2 & 3\cdot 5+1\cdot(-3)+4\cdot 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ 6 & 16 \end{bmatrix}.$$

Olkoon $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ ja $B \in \mathbb{R}^{n\times p}$. Tällöin siis $AB \in \mathbb{R}^{m\times p}$ on määritelty.

Kysymys: Mitä voidaan sanoa matriisista BA?

Vastaus: BA on määritelty vain, jos $p = m$. Tällöin $BA \in \mathbb{R}^{n\times n}$ (ja siis $AB \in \mathbb{R}^{m\times p} = \mathbb{R}^{m\times m}$). Jos $m \neq n$, AB ja BA eivät ole samankokoiset, joten $AB \neq BA$. Jos $m = n$, AB ja BA ovat molemmat $n\times n$-matriiseja ja voi olla $AB = BA$, mutta yleensä tällöinkin $AB \neq BA$.

Esimerkki 1.2.12.

(a) $\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$; $\quad \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ ei ole määritelty.

(b)

$$[1 \quad 2] \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} = [\,-1\,] \quad (1\times 1\text{-matriisi}),$$

$$\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \cdot [1 \quad 2] \cdot = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} \quad (2\times 2\text{-matriisi}).$$

(c)

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Huomautus 1.2.13. Olkoon $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ ja $B \in \mathbb{R}^{n\times p}$; $A^1, \ldots, A^m \in \mathbb{R}^{1\times n}$ A:n rivit ja $B_1, \ldots, B_p \in \mathbb{R}^{n\times 1}$ B:n sarakkeet. Tällöin AB:n rivit ovat $A^1B, \ldots, A^mB \in \mathbb{R}^{1\times p}$; AB:n sarakkeet ovat $AB_1, \ldots, AB_p \in \mathbb{R}^{m\times 1}$; $A^{i_0}B_{j_0} = [\,(AB)(i_0, j_0)\,] \in \mathbb{R}^{1\times 1}$.

Lineaarisen yhtälöryhmän matriisiesitys.

Tarkastellaan lineaarista yhtälöryhmää

$$(1) \qquad \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}\,x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}\,x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \quad\vdots \qquad\quad \vdots \qquad\qquad\quad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m. \end{cases}$$

Merkitään

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}, \qquad X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix};$$

$A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $X \in \mathbb{R}^{n\times 1}$, $B \in \mathbb{R}^{m\times 1}$. A on (1):n *kerroinmatriisi*,

$$[\,A \,\vdots\, B\,] = \left[\begin{array}{cccc:c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array}\right] \qquad (m \times (n+1)\text{-matriisi})$$

sen *täydennetty* matriisi. Tulo AX on määritelty ja

$$AX = \begin{bmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n \end{bmatrix}.$$

Siten $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ on (1):n ratkaisu jos ja vain jos X toteuttaa matriisiyhtälön $AX = B$.

Esimerkki 1.2.14. 1.1.2 e):n yhtälöryhmä on matriisimuodossa

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 1 & -3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 \\ 4 \end{bmatrix}.$$

Yhtälöryhmän (1) voi A:n sarakkeiden avulla myös kirjoittaa muodossa

$$x_1 \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{bmatrix} + \dots + x_n \begin{bmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}.$$

Transponointi.

Määritelmä 1.2.15. $m \times n$-matriisin $A = [\,a_{ij}\,]$ *transpoosi* eli *transponoitu* matriisi on $n \times m$-matriisi $A^T = [\,c_{ij}\,]$, jolla $c_{ij} = a_{ji}$ kaikilla i, j.

Esimerkki 1.2.16.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -3 & 2 & 7 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 2 \\ -1 & 7 \end{bmatrix}.$$

Huomautus 1.2.17. Jos A^i on A:n i:s rivi ja A_j A:n j:s sarake, niin $(A^i)^T$ on A^T:n i:s sarake ja $(A_j)^T$ on A^T:n j:s rivi.

1.3 Matriisien laskulakeja

$m \times n$-matriisien yhteenlasku toteuttaa samanlaiset laskulait kuin reaalilukujen yhteenlasku:

(1) $A + (B + C) = (A + B) + C$ kaikilla $A, B, C \in \mathbb{R}^{m\times n}$ (liitännäisyys).

(2) $A + \mathbf{0} = A$ kaikilla $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, missä

$$\mathbf{0} = \mathbf{0}_{mn} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{m\times n}$$

on $m \times n$-*nollamatriisi* (nollarivejä m kappaletta ja nollasarakkeita n kappaletta). Jos $m = n$, merkitään $\mathbf{0}_n = \mathbf{0}_{nn}$.

(3) $A + (-1)A = \mathbf{0}$ kaikilla $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, missä $-A = (-1)A$ on A:n *vastamatriisi.*

(4) $A + B = B + A$ kaikilla $A, B \in \mathbb{R}^{m\times n}$ (vaihdantalaki).

Perustelu. Yllä olevat tulokset seuraavat matriisien yhteenlaskun määritelmän nojalla reaalilukujen vastaavista ominaisuuksista. Esimerkiksi liitäntälaki (1) seuraa reaalilukujen liitäntälaista, sillä

$$a_{ij} + (b_{ij} + c_{ij}) = (a_{ij} + b_{ij}) + c_{ij} \quad \text{kaikilla } i, j. \quad \square$$

Skalaarilla kertomisen ominaisuudet on yhtä helppo johtaa:

(5) $s(A + B) = sA + sB$ kaikilla $A, B \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $s \in \mathbb{R}$.

(6) $(s + t)A = sA + tA$ kaikilla $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $s, t \in \mathbb{R}$.

(7) $s(tA) = (st)A$ kaikilla $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $s, t \in \mathbb{R}$.

(8) $1A = A$ kaikilla $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$.

Matriisia

$$I_n = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n\times n}$$

kutsutaan *ykkösmatriisiksi*; siis $I_n = [\,\delta_{ij}\,]$, missä

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{kun } i = j \\ 0, & \text{kun } i \neq j. \end{cases}$$

Matriisitulon ominaisuuksia:

Lause 1.3.1. *Jos* $A, A' \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $B, B' \in \mathbb{R}^{n\times p}$, $C \in \mathbb{R}^{p\times q}$ *ja* $t \in \mathbb{R}$, *niin seuraavat kaavat pätevät (ja erityisesti niissä esiintyvät matriisit ovat määriteltyjä):*

(a) $A(B + B') = AB + AB'$,

(b) $(A + A')B = AB + A'B$,

(c) $t(AB) = (tA)B = A(tB)$,

(d) $A(BC) = (AB)C$,

(e) $I_m A = A = AI_n$.

Todistus. Todistetaan malliksi kohdat (d) ja (e):

(d)

$$\begin{aligned}
\big(A(BC)\big)(i,j) &= \sum_{k=1}^{n} A(i,k)\cdot (BC)(k,j) \\
&= \sum_{k=1}^{n} A(i,k)\cdot \left(\sum_{l=1}^{p} B(k,l)\cdot C(l,j)\right) = \sum_{k=1}^{n}\left(\sum_{l=1}^{p} A(i,k)\cdot B(k,l)\cdot C(l,j)\right) \\
&= \sum_{l=1}^{p}\left(\sum_{k=1}^{n} A(i,k)\cdot B(k,l)\cdot C(l,j)\right) = \sum_{l=1}^{p}\left(\sum_{k=1}^{n} A(i,k)\cdot B(k,l)\right)\cdot C(l,j) \\
&= \sum_{l=1}^{p}(AB)(i,l)\cdot C(l,j) = \big((AB)C\big)(i,j) \quad \forall i,j.
\end{aligned}$$

(e) $$(I_m A)(i,j) = \sum_{k=1}^{m} \delta_{ik}\cdot A(k,j) = \delta_{ii}\cdot A(i,j) + \sum_{\substack{k=1\\ k\neq i}}^{m} \delta_{ik}\cdot A(k,j) = A(i,j) \quad \forall i,j,$$

sillä $\delta_{ii} = 1$ ja $\delta_{ik} = 0$, kun $i \neq k$. Vastaavasti $(AI_n)(i,j) = A(i,j) \quad \forall i,j$. $\square$

Huomautus 1.3.2. Matriisitulolta puuttuu osa reaalilukujen kertolaskun ominaisuuksista. 1.2.12:ssa todettiin, että jos $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ (ja $n \geq 2$), niin voi olla $AB \neq BA$ (tulo ei ole ”vaihdannainen”); lisäksi voi olla $AB = \mathbf{0}$, vaikka $A \neq \mathbf{0}$ ja $B \neq \mathbf{0}$ (”tulon nollasääntö” ei päde).

Esimerkki 1.3.3.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} 4 & -6 \\ -2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1\cdot 4 + 2\cdot(-2) & 1\cdot(-6) + 2\cdot 3 \\ 2\cdot 4 + 4\cdot(-2) & 2\cdot(-6) + 4\cdot 3 \end{bmatrix} = \mathbf{0}.$$

Transponoinnin ominaisuuksia:

Lause 1.3.4. *Olkoot* $A, A' \in \mathbb{R}^{m\times n}$*,* $B \in \mathbb{R}^{n\times p}$ *ja* $t \in \mathbb{R}$*. Tällöin*

(a) $(A^T)^T = A$,

(b) $(A + A')^T = A^T + A'^T$,

(c) $(AB)^T = B^T A^T$,

(d) $(tA)^T = tA^T$.

Todistus. Todistetaan malliksi (c):

$$(AB)^T(i,j) = (AB)(j,i) = \sum_{k=1}^{n} A(j,k)\cdot B(k,i) = \sum_{k=1}^{n} B(k,i)\cdot A(j,k)$$

$$= \sum_{k=1}^{n} B^T(i,k)\cdot A^T(k,j) = (B^T A^T)(i,j) \quad \forall i,j. \quad \square$$

1.4 Eräitä erityisiä matriiseja

Neliömatriisi $A = [\,a_{ij}\,] \in \mathbb{R}^{n\times n}$ on *lävistäjämatriisi*, jos $a_{ij} = 0$ aina, kun $i \neq j$ (so. lävistäjän ulkopuoliset alkiot $= 0$); jos lisäksi $a_{ii} = a \in \mathbb{R}$ kaikilla i, A on *skalaarimatriisi* ($= a \cdot I_n$).

Esimerkki 1.4.1.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \qquad \text{ovat lävistäjämatriiseja;}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad \text{ovat skalaarimatriiseja.}$$

Jokainen skalaarimatriisi on tietysti myös lävistäjämatriisi.

Neliömatriisi $A = [\,a_{ij}\,] \in \mathbb{R}^{n\times n}$ on *yläkolmiomatriisi*, jos $a_{ij} = 0$ aina kun $i > j$, ja *alakolmiomatriisi*, jos $a_{ij} = 0$ aina, kun $i < j$.

Esimerkki 1.4.2. Lävistäjämatriisi on sekä ylä- että alakolmiomatriisi;

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix} \quad \text{on yläkolmiomatriisi;} \qquad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} \quad \text{on alakolmiomatriisi;}$$

(Neliö)matriisi $A = [\,a_{ij}\,]$ on *symmetrinen*, jos $A^T = A$ eli $a_{ji} = a_{ij}$ kaikilla i, j, ja *antisymmetrinen*, jos $A^T = -A$ eli $a_{ji} = -a_{ij}$ kaikilla i, j. Antisymmetrisellä matriisilla erityisesti $a_{ii} = -a_{ii}$ kaikilla i, joten jokainen lävistäjäalkio $a_{ii} = 0$.

Esimerkki 1.4.3.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 6 \end{bmatrix} \quad \text{on symmetrinen;} \qquad \begin{bmatrix} 0 & 2 & 3 \\ -2 & 0 & 4 \\ -3 & -4 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{on antisymmetrinen.}$$

Säännölliset matriisit.

Määritelmä 1.4.4. Neliömatriisi $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ on *säännöllinen* eli *kääntyvä*, jos on olemassa sellainen matriisi $B \in \mathbb{R}^{n\times n}$, että $AB = I_n$ ja $BA = I_n$. Muussa tapauksessa A on *singulaarinen*.

Huomautus 1.4.5. Jos $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ on säännöllinen, niin 1.4.4:ssä mainittu $B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ on yksikäsitteinen. Jos nimittäin myös $C \in \mathbb{R}^{n\times n}$ toteuttaa ehdot $AC = I_n$ ja $CA = I_n$, niin

$$C = CI_n = C(AB) = (CA)B = I_nB = B.$$

Voidaan siis merkitä $B = A^{-1}$, säännöllisen matriisin *käänteismatriisi*.

Esimerkki 1.4.6. a) 1×1-matriisi $[\,a\,] \in \mathbb{R}^{1\times 1}$ on säännöllinen $\iff$ $a \neq 0$; tällöin $[\,a\,]^{-1} = [\,1/a\,]$.

b) $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ on säännöllinen ja $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, sillä

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

c) $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ ei ole säännöllinen, sillä

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_{21} & b_{22} \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

joka ei voi olla I_2.

Kappaleessa 1.6 kehitämme menetelmän, jolla voi selvittää, onko annettu $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ säännöllinen, ja myönteisessä tapauksessa määrittää A^{-1}:n.

Lause 1.4.7. *Jos $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ ovat säännöllisiä, niin myös A^{-1}, AB ja A^T ovat säännöllisiä ja*

$$(A^{-1})^{-1} = A, \qquad (AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}, \qquad (A^T)^{-1} = (A^{-1})^T.$$

Todistus. A^{-1}:n säännöllisyyttä ja käänteismatriisia koskevat väitteet seuraavat heti käänteismatriisin määritelmästä ja yhtälöistä $AA^{-1} = I_n = A^{-1}A$. Muut väitteet seuraavat yhtälöistä

$$(AB)(B^{-1}A^{-1}) = A(BB^{-1})A^{-1} = AI_nA^{-1} = AA^{-1} = I_n,$$
$$(B^{-1}A^{-1})(AB) = B^{-1}(A^{-1}A)B = B^{-1}I_nB = B^{-1}B = I_n;$$

$$A^T(A^{-1})^T = (A^{-1}A)^T = I_n^T = I_n$$
$$(A^{-1})^TA^T = (AA^{-1})^T = I_n^T = I_n,$$

joissa käytettiin laskulakeja 1.3.1 d) ja 1.3.4 c). □

Lineaariset yhtälöryhmät ja käänteismatriisit.

Tarkastellaan lineaarista yhtälöryhmää, jossa on n yhtälöä ja n tuntematonta, matriisimuodossa $AX = B$, missä $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ ja $X, B \in \mathbb{R}^{n\times 1}$.

Lause 1.4.8. *Jos $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ on säännöllinen, yhtälöryhmällä $AX = B$ on yksikäsitteinen ratkaisu $X \in \mathbb{R}^{n\times 1}$, nimittäin $X = A^{-1}B$.*

Todistus. Jos $X = A^{-1}B$, niin $AX = A(A^{-1}B) = (AA^{-1})B = IB = B$, koska $AA^{-1} = I$. Kääntäen, jos $AX = B$, niin $X = IX = (A^{-1}A)X = A^{-1}(AX) = A^{-1}B$, koska $A^{-1}A = I$. □

Todistuksessa tarvittiin siis molempia yhtälöitä $AA^{-1} = I$ ja $A^{-1}A = I$.

Huomautus 1.4.9. Jos $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ on säännöllinen ja $B \in \mathbb{R}^{n\times p}$, niin vastaavasti matriisiyhtälöllä $AX = B$ on yksikäsitteinen ratkaisu $X = A^{-1}B \in \mathbb{R}^{n\times p}$.

1.4.8:n tilanteessa(kin) yhtälöryhmä $AX = B$ on yleensä helpointa ratkaista suoraan 1.5:ssä esitettävillä menetelmillä, etsimättä käänteismatriisia A^{-1}.

1.5 Porrasmatriisit ja lineaaristen yhtälöryhmien ratkaiseminen

Määritelmä 1.5.1. Matriisi on *porrasmuotoinen* eli *porrasmatriisi*, jos seuraavat ehdot (1), (2) ja (3) ovat voimassa:

(1) Nollarivit (jos niitä on) ovat alimpina.

(2) Jokaisen nollasta eroavan rivin vasemmalta lukien ensimmäinen nollasta eroava alkio, ko. rivin *johtava alkio*, on $= 1$.

(3) Alemman rivin johtavan alkion sarake sijaitsee aina ylemmän rivin johtavan alkion sarakkeen oikealla puolella.

Porrasmatriisi on *redusoitu* jos lisäksi

(4) Jokainen johtava alkio on sarakkeensa ainoa nollasta eroava alkio.

Olkoon $A = [\,a_{ij}\,] \in \mathbb{R}^{m\times n}$ porrasmatriisi, jossa on r nollasta eroavaa riviä. Ehdosta 1.5.1 (1) seuraa, että nollasta eroavat rivit ovat rivit $1, 2, \dots, r$ ja nollarivit ovat rivit $r + 1, r + 2, \dots, m$. Olkoon i:nnen rivin johtava alkio kohdassa (i, j_i) $(i = 1, 2, \dots, r)$. (2):n nojalla $a_{ij_i} = 1$ kaikilla $i \in \{1, 2, \dots, r\}$ ja (3):n nojalla

$$1 \le j_1 < j_2 < \cdots < j_r \le n$$

Erityisesti täytyy olla

$$0 \le r \le \min\{m, n\}.$$

A on muotoa

$$\begin{bmatrix}
0 \dots 0 \; 1 \; a_{1,j_1+1} \; \dots & & & & \dots a_{1n} \\
0 \dots & \dots 0 \; 1 \; a_{2,j_2+1} \; \dots & & & \dots a_{2n} \\
0 \dots & & \dots 0 \; 1 \; a_{3,j_3+1} \dots & & \dots a_{3n} \\
\vdots & & & \ddots & \vdots \\
0 \dots & & & \dots 0 \; 1 \; a_{r,j_r+1} & \dots a_{rn} \\
0 \dots & & & & \dots \; 0 \\
\vdots & & 0 & & \vdots \\
0 \dots & & & & \dots \; 0
\end{bmatrix}.$$

Jos A on redusoitu, niin lisäksi $a_{kj_i} = 0$, kun $k < i$ $(i = 1, 2, \dots, r)$.

Havainto 1.5.2. Jos neliömatriisi $A = [\,a_{ij}\,] \in \mathbb{R}^{n\times n}$ on redusoidussa porrasmuodossa, niin joko

(1) A:ssa on nollarivejä, tai

(2) $A = I_n$.

(Tapaukset (1) ja (2) eivät ole yhtä aikaa voimassa.)

Todistus. Olkoot A:n johtavat alkiot kohdissa $(1, j_1)$, … ,(r, j_r) kuten yllä. Oletetaan, että A:ssa ei ole nollarivejä. Tällöin $r = n$. Koska $1 \le j_1 < j_2 < \cdots < j_n \le n$ ja lukuja $j_1, j_2, \dots, j_n$ on n kappaletta, niin välttämättä $j_1 = 1$, $j_2 = 2$, … , $j_n = n$, ja siis $a_{11} = a_{22} = \cdots = a_{nn} = 1$. 1.5.1:n kohtien (2)–(4) nojalla muut A:n alkiot $= 0$. $\square$

Rivitoimitukset.

Olkoot $A, B \in \mathbb{R}^{m\times n}$ $m \times n$-matriiseja, joiden rivit ovat rivit $A^1, \dots, A^m$ ja $B^1, \dots, B^m$.

Määritelmä 1.5.3. B on saatu A:sta yhdellä *alkeisrivitoimituksella* seuraavissa kolmessa tapauksessa:

I. Eräillä $r, s \in \{1, 2, \ldots, m\}$, $r \neq s$, on $B^r = A^s$, $B^s = A^r$ ja $B^i = A^i$ Kaikilla $i \neq r, s$. (A:n rivit r ja s on vaihdettu.)

II. Eräillä $r \in \{1, 2, \ldots, m\}$ ja $c \in \mathbb{R}$, $c \neq 0$, on $B^r = cA^r$ ja $B^i = A^i$ Kaikilla $i \neq r$. (A:n rivi r on kerrottu vakiolla $c \neq 0$.)

III. Eräillä $r, s \in \{1, 2, \ldots, m\}$, $r \neq s$, ja $c \in \mathbb{R}$ on $B^s = A^s + c \cdot A^r$ ja $B^i = A^i$ kaikilla $i \neq s$. (A:n riviin s on lisätty $c \times$ (A:n rivi r).)

Määritelmä 1.5.4. Matriisi $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ on *riviekvivalentti* matriisin $B \in \mathbb{R}^{m\times n}$ kanssa, jos B saadaan A:sta äärellisen monella alkeisrivitoimituksella, ts. jos on olemassa sellaiset matriisit A_0, A_1, ... , A_k, että $A_0 = A$, $A_k = B$ ja A_{l+1} on saatu A_l:stä yhdellä alkeisrivitoimituksella ($l = 0, 1, \ldots, k-1$).

Lause 1.5.5. *Jokainen $m \times n$ -matriisi A on riviekvivalentti jonkin redusoidun porrasmatriisin kanssa.*

Todistus. Esitämme "algoritmin", joka muuntaa A:n alkeisrivitoimituksin redusoituun porrasmuotoon. Jos $A = \mathbf{0}$, A on jo redusoidussa porrasmuodossa (pelkkiä nollarivejä). Olkoon siis $A \neq \mathbf{0}$.

Vaihe 1: A muunnetaan porrasmuotoon.

(1) Etsitään (vasemmalta lukien) A:n ensimmäinen nollasta eroava sarake ja valitaan ko. sarakkeesta jokin alkio $a \neq 0$.

(2) Siirretään a:n sisältävä rivi ylimmäksi vaihtamalla (tarvittaessa) kaksi riviä keskenään.

(3) Kerrotaan 1. (ylin) rivi luvulla $1/a$. On päästy muotoon

$$\begin{bmatrix} \ldots & 0 & 1 & * & * & \ldots \\ \ldots & 0 & a_2 & * & * & \ldots \\ & \vdots & \vdots & & & \\ \ldots & 0 & a_m & * & * & \ldots \end{bmatrix}$$

(missä $*$ = mikä tahansa luku).

(4) Lisätään i:nteen riviin $(-a_i) \times$ (1. rivi), $i = 2, \ldots, m$; tuloksena on matriisi

$$\begin{bmatrix} \ldots & 0 & 1 & * & * & \ldots \\ \ldots & 0 & 0 & & & \\ & \vdots & \vdots & & A' & \\ \ldots & 0 & 0 & & & \end{bmatrix},$$

missä A' on $(m-1) \times p$-matriisi jollakin $p < n$.

(5) Jos $A' = \mathbf{0}$, on saatu porrasmatriisi; jos $A' \neq \mathbf{0}$, sovelletaan siihen kohtia (1)–(4).

Äärellisen monen askeleen jälkeen saadaan porrasmatriisi C.

Vaihe 2: Porrasmatriisi C muunnetaan redusoiduksi porrasmatriisiksi. Olkoot C:n johtavat alkiot kohdissa $(1, j_1), \ldots, (r, j_r)$.

(1) Muutetaan kohdissa (i, j_r), $i = 1, 2, \ldots, r-1$, mahdollisesti olevat nollasta eroavat alkiot nolliksi lisäämällä kyseisiin riveihin r:nnen rivin sopivat kerrannaiset.

(2) Seuraavaksi tuotetaan vastaavasti nollat kohdan $(r-1, j_{r-1})$ yläpuolelle jne. $\square$

Esimerkki 1.5.6. Muunnetaan annettu 4×5-matriisi a) porrasmatriisiksi, b) redusoiduksi porrasmatriisiksi.

(a)
$$\begin{bmatrix} 0 & 2 & 3 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 2 & -5 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & -6 & 9 & 7 \end{bmatrix} \underset{(1)}{\rightsquigarrow} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -\frac{5}{2} & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 3 & -4 & 1 \\ 2 & 0 & -6 & 9 & 7 \end{bmatrix}$$

$$\underset{(2)}{\rightsquigarrow} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -\frac{5}{2} & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 3 & -4 & 1 \\ 0 & -2 & -1 & 7 & 3 \end{bmatrix} \underset{(3)}{\rightsquigarrow} \begin{bmatrix} 0 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & -4 & 1 \\ -2 & -1 & 7 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\underset{(4)}{\rightsquigarrow} \begin{bmatrix} 1 & \frac{3}{2} & -2 & \frac{1}{2} \\ 0 & 2 & 3 & 4 \\ -2 & -1 & 7 & 3 \end{bmatrix} \underset{(5)}{\rightsquigarrow} \begin{bmatrix} 1 & \frac{3}{2} & -2 & \frac{1}{2} \\ 0 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 3 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\underset{(6)}{\rightsquigarrow} \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 \end{bmatrix} \underset{(7)}{\rightsquigarrow} \begin{bmatrix} 1 & \frac{3}{2} & 2 \\ 2 & 3 & 4 \end{bmatrix} \underset{(8)}{\rightsquigarrow} \begin{bmatrix} 1 & \frac{3}{2} & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Selitykset:

(1) Vaihdetaan rivit 1 ja 3 keskenään ja kerrotaan sen jälkeen rivi 1 vakiolla $\frac{1}{2}$.

(2) Lisätään riviin 4 rivi 1 vakiolla -2 kerrottuna.

(3) Koska rivi 1 ja sarake 1 eivät tämän jälkeen muutu, ne voidaan jättää jatkotarkasteluissa pois.

(4) Vaihdetaan rivit 1 ja 2 ja kerrotaan sen jälkeen rivi 1 luvulla $\frac{1}{2}$.

(5) Lisätään riviin 3 rivi 1 luvulla 2 kerrottuna.

(6) Koska rivi 1 ja sarake 1 eivät tämän jälkeen muutu, ne voidaan jättää jatkotarkasteluissa pois.

(7) Kerrotaan rivi 1 luvulla $\frac{1}{2}$.

(8) Lisätään riviin 2 rivi 1 luvulla -2 kerrottuna. Koska saatiin matriisi, jonka alin rivi on nollarivi, tehtävä on valmis.

Lopuksi yhdistetään yllä olevat vaiheet (2), (5) ja (8) jolloin saadaan alkuperäisen kanssa riviekvivalentti porrasmatriisi

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -\frac{5}{2} & 1 & 2 \\ 0 & 1 & \frac{3}{2} & -2 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{3}{2} & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

b) Redusoidun porrasmatriisin saamiseksi jatketaan viimeksi saadusta muodosta

$$\underset{(1)}{\rightsquigarrow} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & \frac{19}{4} & 7 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{17}{4} & -\frac{5}{2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{3}{2} & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \underset{(2)}{\rightsquigarrow} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 9 & \frac{19}{2} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{17}{4} & -\frac{5}{2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{3}{2} & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Selitykset:

(1) Koska alin johtava kerroin on kohdassa $(3,3)$, hävitetään aluksi kolmannelta sarakkeelta mainitun kohdan yläpuolella olevat nollasta eroavat alkiot. Sitä varten lisätään toiseen riviin kolmas rivi luvulla $-\frac{3}{2}$ kerrottuna, ja ensimmäiseen riviin lisätään kolmas rivi luvulla $\frac{5}{2}$ kerrottuna .

(2) Koska seuraavaksi alin johtava kerroin sijaitsee kohdassa $(2,2)$, lisätään ensimmäiseen riviin toinen rivi luvulla -1 kerrottuna. Näin saadaan alkuperäisen matriisin kanssa riviekvivalentti redusoitu porrasmatriisi.

Lineaarisen yhtälöryhmän ratkaiseminen.

Haluamme ratkaista (matriisimuotoisen) lineaarisen yhtälöryhmän $AX = B$, $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $X \in \mathbb{R}^{n\times 1}$, $B \in \mathbb{R}^{m\times 1}$. Tarkastelemme täydennettyä matriisia $[\,A \,¦\, B\,] \in \mathbb{R}^{m\times(n+1)}$.

Lause 1.5.7. *Jos $[\,A \,¦\, B\,]$ on riviekvivalentti $[\,C \,¦\, D\,]$:n kanssa, yhtälöryhmät $AX = B$ ja $CX = D$ ovat ekvivalentit (eli niillä on samat ratkaisut).*

Todistus. Tyyppiä I, II ja III olevat alkeisrivitoimitukset (ks. 1.5.3) vastaavat lineaarisille yhtälöryhmille suoritettavia toimituksia I, II ja III (sivu 5). Väite seuraa siten lauseesta 1.1.4. □

1.5.5:n nojalla yllä $[\,C \,¦\, D\,]$:ksi voidaan valita (jopa redusoitu) porrasmatriisi. Tällöin $CX = D$ on helppo ratkaista:

Esimerkki 1.5.8. Yhtälöryhmän $CX = D$ ratkaiseminen, kun $[\,C \,\vdots\, D\,]$ on a) porrasmatriisi, b) redusoitu porrasmatriisi:

a) Myös C on selvästi porrasmatriisi. Olkoot C:n johtavat alkiot kohdissa $(1, j_1)$, ..., (r, j_r). Tällöin $[\,C \,\vdots\, D\,]$ on muotoa

$$\begin{bmatrix} 0 \dots 0\ 1\ c_{1,j_1+1}\ \dots & & & & \dots & d_1 \\ 0 \dots & \dots 0\ 1\ c_{2,j_2+1}\ \dots & & & \dots & d_2 \\ 0 \dots & & \dots 0\ 1\ c_{3,j_3+1} \dots & & \dots & d_3 \\ \vdots & & & \ddots & & \vdots \\ 0 \dots & & & \dots 0\ 1\ c_{r,j_r+1} & \dots & d_r \\ 0 \dots & & & & \dots 0 & d_{r+1} \\ 0 \dots & & & & \dots 0 & 0 \\ \vdots & & & & \vdots & \vdots \\ 0 \dots & & & & \dots 0 & 0 \end{bmatrix},$$

missä $d_{r+1} = 0$ tai 1.

(1) Jos $r < m$ (C:ssä on nollarivejä) ja $d_{r+1} = 1 \neq 0$, mukana on mahdoton yhtälö $0 = d_{r+1} = 1$, joten yhtälöryhmällä ei ole ratkaisuja tässä tapauksessa.

(2) Oletetaan, että $r = m$ (C:ssä ei ole nollarivejä) tai $d_{r+1} = 0$.

i) Tuntemattomat x_k, $k \notin \{j_1, \dots, j_r\}$ ($n - r$ kappaletta), ovat *vapaat muuttujat*, joiden arvot voidaan valita vapaasti: annetaan vapaille muuttujille x_{k_1}, x_{k_2}, ..., $x_{k_{n-r}}$, missä $1 \leq k_1 < k_2 < \dots < k_{n-r} \leq n$, arvot

$$x_{k_1} = s_1 \in \mathbb{R},\ x_{k_2} = s_2 \in \mathbb{R},\ \dots,\ x_{k_{n-r}} = s_{n-r} \in \mathbb{R}.$$

ii) Yhtälöstä r,

$$x_{j_r} + \sum_{k_l > j_r} c_{rk_l} s_l = d_r,$$

lausutaan x_{j_r} parametrien s_l ($k_l > j_r$) avulla.

iii) Yhtälöön $r - 1$,

$$x_{j_{r-1}} + c_{r-1,j_r} x_{j_r} + \sum_{k_l > j_{r-1}} c_{r-1,k_l} s_l = d_{r-1},$$

sijoitetaan takaisin x_{j_r} kohdasta ii) ja lausutaan $x_{j_{r-1}}$ parametrien s_l ($k_l > j_{r-1}$) avulla.

iv) Ratkaistaan vastaavalla tavalla muita johtavien kertoimien sarakkeita vastaavat tuntemattomat järjestyksessä $x_{j_{r-2}}$, ..., x_{j_2}, x_{j_1}.

Huomautus. Jos (2):ssa $r = n$, vapaita muuttujia ei ole, ja ratkaisu on yksikäsitteinen. Jos $r < n$, jokaista parametrijonoa $(s_1, \ldots, s_{n-r})$ vastaa tietty ratkaisu $(x_1, \ldots, x_n)$ (ääretön määrä ratkaisuja).

b) Olkoon $[\,C \,\vdots\, D\,]$ redusoitu porrasmatriisi. Menetellään kuten a)-kohdassa, paitsi että kohdan (2) takaisinsijoituksia ei tarvita, vaan suoraan

$$x_{j_p} = d_p - \sum_{k_l > j_p} c_{pk_l} s_l, \quad p = 1, \ldots, r. \quad \square$$

Esimerkki 1.5.9. Olkoon

$$[\,C \,\vdots\, D\,] = \left[\begin{array}{ccccc:c} 1 & 1 & 2 & 0 & -\frac{5}{2} & \frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array}\right].$$

Tällöin $CX = D$ on

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 - \frac{5}{2}x_5 = \frac{2}{3} \\ x_4 + \frac{1}{2}x_5 = \frac{1}{2}. \end{cases}$$

Vapaat muuttujat ovat x_2, x_3 ja x_5. Merkitään $x_2 = s_1 \in \mathbb{R}$, $x_3 = s_2 \in \mathbb{R}$, $x_5 = s_3 \in \mathbb{R}$, jolloin ratkaisut ovat

$$\begin{cases} x_1 = \frac{2}{3} - x_2 - 2x_3 + \frac{5}{2}x_5 = \frac{2}{3} - s_1 - 2s_2 + \frac{5}{2}s_3 \\ x_2 = s_1 \\ x_3 = s_2 \\ x_4 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}x_5 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}s_3 \\ x_5 = s_3, \end{cases}$$

tai matriisimuodossa

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} \\ 0 \\ 0 \\ \frac{1}{2} \\ 0 \end{bmatrix} + s_1 \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + s_2 \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + s_3 \begin{bmatrix} \frac{5}{2} \\ 0 \\ 0 \\ -\frac{1}{2} \\ 1 \end{bmatrix}; \quad s_1, s_2, s_3 \in \mathbb{R}.$$

Lineaarinen yhtälöryhmä $AX = B$ voidaan siis ratkaista (mm.) jommallakummalla seuraavista menetelmistä:

Gaussin eliminointimenetelmä:

A. Etsitään (rivitoimituksin) $[\,A \,\vdots\, B\,]$:n kanssa riviekvivalentti porrasmatriisi $[\,C \,\vdots\, D\,]$.

B. Ratkaistaan $CX = D$ takaisinsijoituksin (jos ratkaisuja on).

Gaussin-Jordanin eliminointimenetelmä:

A. Etsitään (rivitoimituksin) $[\,A \,\vdots\, B\,]$:n kanssa riviekvivalentti redusoitu porrasmatriisi $[\,C \,\vdots\, D\,]$.

B. Luetaan suoraan yhtälöryhmän $CX = D$ ratkaisut (jos niitä on).

Esimerkki 1.5.10. Ratkaise Gaussin menetelmällä

$$\begin{cases} \qquad\;\; 2x_2 + 3x_3 - 4x_4 = 1 \\ \qquad\qquad\quad 2x_3 + 3x_4 = 4 \\ 2x_1 + 2x_2 - 5x_3 + 2x_4 = 4 \\ 2x_1 \qquad\;\; - 6x_3 + 9x_4 = 7. \end{cases}$$

Ratkaisu. $[\,A \,\vdots\, B\,]$ muunnettiin rivitoimituksin porrasmuotoon $[\,C \,\vdots\, D\,]$ 1.5.6 a):ssa. Yhtälöryhmän $CX = D$ eli

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - \frac{5}{2}x_3 + \;\; x_4 = 2 \\ \qquad x_2 + \frac{3}{2}x_3 - 2x_4 = \frac{1}{2} \\ \qquad\qquad x_3 + \frac{3}{2}x_4 = 2 \\ \qquad\qquad\qquad\quad 0 = 0 \end{cases}$$

ratkaisu on

$$\begin{cases} x_1 = 2 - x_2 + \frac{5}{2}x_3 - x_4 = 2 - (-\frac{5}{2} + \frac{17}{4}s) + \frac{5}{2}(2 - \frac{3}{2}s) - s = \frac{19}{2} - 9s \\ x_2 = \frac{1}{2} - \frac{3}{2}x_3 + 2x_4 = \frac{1}{2} - \frac{3}{2}(2 - \frac{3}{2}s) + 2s = -\frac{5}{2} + \frac{17}{4}s \\ x_3 = 2 - \frac{3}{2}x_4 = 2 - \frac{3}{2}s \\ x_4 = s \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Huomautus 1.5.11. Porrasmuotoon pyrkiminen ei aina ole nopein ratkaisumenetelmä. Esimerkiksi yhtälöryhmästä

$$\begin{cases} x_1 \qquad\qquad\; = 1 \\ x_1 \qquad - x_3 = 0 \\ x_1 - x_2 + x_3 = 1 \end{cases} \qquad \text{saadaan heti} \qquad \begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = -1 + x_1 + x_3 = 1 \\ x_3 = x_1 = 1, \end{cases}$$

vaikka matriisi ei ole porrasmuotoinen.

Homogeeniset yhtälöryhmät.

Tarkastellaan homogeenista ryhmää $AX = \mathbf{0}$, $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $X \in \mathbb{R}^{n\times 1}$ (m yhtälöä ja n tuntematonta). Tällä on aina triviaali ratkaisu $X = \mathbf{0}$.

Lause 1.5.12. *Jos $m < n$ (eli yhtälöitä on vähemmän kuin tuntemattomia), yhtälöryhmällä $AX = \mathbf{0}$ on myös epätriviaaleja ratkaisuja.*

Todistus. Täydennetyn matriisin $[\,A \mid \mathbf{0}\,]$ kanssa riviekvivalentti porrasmatriisi on muotoa $[\,C \mid \mathbf{0}\,]$, eli siinäkin vakiot ovat nollia. Kun yhtälöryhmää $CX = \mathbf{0}$ ratkaistaan kuten 1.5.8 a):ssa, tapaus (1) ei näin ollen ole mahdollinen, joten yhtälöryhmällä on ratkaisuja joko tasan yksi tai ääretön määrä sen mukaan, onko vapaiden muuttujien lukumäärä $n - r$ nolla vai positiivinen. Koska $m < n$, on $r \leq \min\{m, n\} = m < n$; siis vapaita muuttujia on $n - r > 0$ kappaletta, ja ratkaisuja on ääretön määrä. Ratkaisuista yksi on triviaali ja muut (joita on ääretön määrä) epätriviaaleja. $\square$

Tarkastellaan lopuksi yleistä lineaarista yhtälöryhmää $AX = B$, $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $X \in \mathbb{R}^{n\times 1}$, $B \in \mathbb{R}^{m\times 1}$.

Lause 1.5.13. *Olkoon $S_0 \in \mathbb{R}^{n\times 1}$ yhtälöryhmän $AX = B$ eräs ratkaisu. Silloin $S \in \mathbb{R}^{n\times 1}$ on ko. ryhmän (yleinen) ratkaisu $\iff$ $S = S_0 + T$, missä $T \in \mathbb{R}^{n\times 1}$ on homogeenisen ryhmän $AX = \mathbf{0}$ (yleinen) ratkaisu.*

Todistus. " $\Longleftarrow$ ". Olkoon $S = S_0 + T$, missä $AT = \mathbf{0}$. Koska $AS_0 = B$, on $AS = A(S_0 + T) = AS_0 + AT = B + \mathbf{0} = B$.

" $\Longrightarrow$ ". Olkoon $AS = B$. Tällöin $S = S_0 + (S - S_0) = S_0 + T$, missä $AT = A(S - S_0) = AS - AS_0 = B - B = \mathbf{0}$. $\square$

1.6. Alkeismatriisit ja matriisin säännöllisyys

Kun $r, s \in \{1, 2, \ldots, m\}$, määritellään neliömatriisi $I_{rs} = [\,e_{ij}\,] \in \mathbb{R}^{m\times m}$ asettamalla

$$e_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{kun } (i,j) = (r,s) \\ 0, & \text{muulloin.} \end{cases}$$

Siis I_{rs}:n (r,s)-alkio $= 1$, kaikki muut alkiot $= 0$. (Samalla tavalla voidaan yleisemmin määritellä $m \times n$-matriisi I_{rs}, kun $r \in \{1, 2, \ldots m\}$, $s \in \{1, 2, \ldots n\}$.)

Olkoon $A = [\,a_{ij}\,] \in \mathbb{R}^{m\times n}$ $m \times n$-matriisi. Lasketaan $I_{rs}A$:

$$(I_{rs}A)(i,j) = \sum_{k=1}^{m} e_{ik}a_{kj}.$$

Kun $i \neq r$, $e_{ik}a_{kj} = 0 \cdot a_{kj} = \mathbf{0}$ kaikilla k;
kun $i = r$,

$$e_{rk}a_{kj} = \begin{cases} 1 \cdot a_{sj} = a_{sj}, & \text{kun } k = s \\ 0 \cdot a_{kj} = 0, & \text{kun } k \neq s. \end{cases}$$

Näin ollen

$$(I_{rs}A)(i,j) = \begin{cases} a_{sj}, & \text{kun } i = r \\ 0, & \text{kun } i \neq r, \end{cases}$$

ts. $I_{rs}A$:n r:s rivi $= A$:n s:s rivi ja $I_{rs}A$:n muut rivit $= \mathbf{0}$.

Määritelmä 1.6.1. $m \times m$-matriisi E on *alkeismatriisi*, jos se saadaan ykkösmatriisista I_m yhdellä alkeisrivitoimituksella.

Lemma 1.6.2. *Olkoon $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ $m \times n$-matriisi, ja olkoon alkeismatriisi $E \in \mathbb{R}^{m\times m}$ saatu I_m:stä tietyllä alkeisrivitoimituksella. Tällöin EA saadaan A:sta samalla alkeisrivitoimituksella.*

Todistus. Tutkitaan alkeisrivitoimitusten tyypit I, II ja III erikseen. Olkoot A:n rivit $A^1, A^2, \dots, A^m \in \mathbb{R}^{1\times n}$.

I. Vaihdetaan rivit r ja s ($r \neq s$).

Tarkastellaan ensin erikoistapausta $m = 3$, $r = 2$, $s = 3$, eli kolmirivisessä ykkösmatriisissa vaihdetaan toinen ja kolmas rivi. Tällöin saadaan alkeismatriisi

$$E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = I_{23} + I_{32} + I_{11}.$$

Yleisessä tapauksessa saadaan tämän erikoistapauksen mukaisesti

$$E = I_{rs} + I_{sr} + \sum_{k\neq r,s} I_{kk},$$

josta edelleen seuraa

$$EA = I_{rs}A + I_{sr}A + \sum_{k\neq r,s} I_{kk}A.$$

Edellä todetun mukaan

(1) $I_{rs}A$:n r:s rivi $= A^s$; muut rivit $= \mathbf{0}$

(2) $I_{sr}A$:n s:s rivi $= A^r$; muut rivit $= \mathbf{0}$

(3) $I_{kk}A$:n k:s rivi $= A^k$; muut rivit $= \mathbf{0}$ ($k \neq r, s$).

Näin ollen EA:n r:s rivi $= A^s$, s:s rivi $= A^r$, k:s rivi $= A^k$ ($k \neq r, s$).

II. Kerrotaan rivi r luvulla c, $c \neq 0$.

Tarkastellaan jälleen ensin erikoistapausta $m = 3$, $r = 3$, ts. kerrotaan ykkösmatriisin I_3 kolmas rivi vakiolla c, jolloin saadaan alkeismatriisi

$$E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = cI_{33} + I_{11} + I_{22}.$$

Tämän mukaisesti yleisessä tapauksessa

$$E = cI_{rr} + \sum_{k\neq r} I_{kk},$$

josta edelleen seuraa

$$EA = c(I_{rr}A) + \sum_{k \neq r} I_{kk}A.$$

Kussakin yhteenlaskettavassa on (enintään) yksi nollasta eroava rivi, ja yhteenlaskun jälkeen nähdään, että EA on matriisi, joka saadaan kertomalla A:n r:s rivi vakiolla c.

III. Lisätään $c \cdot (\text{rivi } r)$ riviin s ($c \in \mathbb{R}$, $r \neq s$).

Tarkastellaan aluksi jälleen erikoistapausta $m = 3$, $r = 2$, $s = 3$, ts. lisätään ykkösmatriisin I_3 kolmanteen riviin toinen rivi vakiolla c kerrottuna; saadaan alkeismatriisi

$$E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & c & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & c & 0 \end{bmatrix} = I_3 + cI_{32}.$$

Tämän mukaisesti yleisessä tapauksessa

$$E = I_m + cI_{sr},$$

josta seuraa

$$EA = I_mA + c(I_{sr}A) = A + c(I_{sr}A).$$

Matriisin $c(I_{sr}A)$ s:s rivi on $= c \cdot A^r$ ja muut rivit $= \mathbf{0}$, joten EA on haluttua muotoa. $\square$

Seuraus 1.6.3. *$A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ on riviekvivalentti matriisin $B \in \mathbb{R}^{m\times n}$ kanssa $\iff$ on olemassa alkeismatriisit $E_1, E_2, \ldots, E_k \in \mathbb{R}^{m\times m}$, joilla $B = E_k \cdots E_2E_1A$.*

Todistus. "$\Longrightarrow$". Oletetaan, että A on riviekvivalentti B:n kanssa. Määritelmän 1.5.4 nojalla on olemassa sellaiset matriisit $A_0, A_1, \ldots, A_k$, että $A_0 = A$, $A_k = B$ ja A_{l+1} on saatu A_l:stä yhdellä alkeisrivitoimituksella ($l = 0, 1, \ldots, k-1$). Olkoon E_{l+1} se alkeismatriisi, joka on saatu samalla alkeisrivitoimituksella ykkösmatriisista I_m kuin A_{l+1} A_l:stä. Lemman 1.6.2 nojalla $A_{l+1} = E_{l+1}A_l$ ($l = 0, 1, \ldots, k-1$). Näin ollen

$$B = E_kA_{k-1} = \cdots = E_k \cdots E_2E_1A.$$

"$\Longleftarrow$". Oletetaan, että $B = E_k \cdots E_2E_1A$, missä $E_1, E_2, \ldots, E_k \in \mathbb{R}^{m\times m}$ ovat alkeismatriiseja . Merkitään $A_0 = A$ ja $A_l = E_lE_{l-1}\cdots E_1A$, kun $l = 1, 2, \ldots, k$. Silloin $B = A_k$ ja $A_{l+1} = E_{l+1}A_l$ on saatu A_l:stä yhdellä alkeisrivitoimituksella ($l = 0, 1, \ldots, k-1$), joten määritelmän 1.5.4 nojalla A on riviekvivalentti B:n kanssa. $\square$

Lemma 1.6.4. *Alkeismatriisi $E \in \mathbb{R}^{m\times m}$ on säännöllinen ja E^{-1} on samantyyppinen (I, II tai III) alkeismatriisi.*

Todistus. E:tä vastaavalla alkeisrivitoimituksella on "käänteistoimitus":

I. Rivien r ja s vaihtaminen (toistamiseen).

II. Rivin r kertominen luvulla $1/c$.

III. $(-c)\cdot$(rivi r):n lisääminen riviin s.

Olkoon $E' \in \mathbb{R}^{m\times m}$ tätä käänteistoimitusta vastaava alkeismatriisi. Lemman 1.6.2 nojalla $E'E$ saadaan E:stä samalla alkeisrivitoimituksella kuin E' saadaan I_m:stä.

Tapauksessa I on $E'E$ näin ollen se matriisi, joka saadaan E:stä vaihtamalla rivit r ja s; koska E saatiin I_m:stä vaihtamalla jo kertaalleen rivit r ja s, on $E'E = I_m$.

Tapauksessa II on $E'E$ se matriisi, joka saadaan kertomalla E:n r:s rivi luvulla $1/c$. Toisaalta E saatiin I_m:stä kertomalla tämän r:s rivi luvulla c, joten tässäkin tapauksessa $E'E = I_m$ (I_m:n r:s rivi tulee kaikkiaan kerrottua luvulla $(1/c)\cdot c = 1$).

Tapauksessa III on $E'E$ se matriisi, joka saadaan lisäämällä E:n s:nteen riviin E:n r:s rivi kerrottuna luvulla $-c$. Toisaalta E saatiin I_m:stä lisäämällä tämän s:nteen riviin r:s rivi luvulla c kerrottuna, joten tässäkin tapauksessa $E'E = I_m$ ($(-c)+c=0$).

Vastaavasti todetaan, että $EE' = I_m$. Siis E on säännöllinen ja $E' = E^{-1}$. □

Lause 1.6.5. *$n\times n$ -matriisilla A ovat seuraavat ehdot yhtäpitävät:*

i) *A on säännöllinen.*

ii) *Homogeenisella yhtälöryhmällä $AX = \mathbf{0}$ on vain triviaali ratkaisu $X = \mathbf{0}$.*

iii) *A on riviekvivalentti ykkösmatriisin I_n kanssa.*

iv) *A on äärellisen monen alkeismatriisin tulo.*

Todistus. Osoitetaan, että i) $\Longrightarrow$ ii) $\Longrightarrow$ iii) $\Longrightarrow$ iv) $\Longrightarrow$ i), jolloin kaikki ekvivalenssit tulevat todistetuiksi.

i) $\Longrightarrow$ ii). Jos A on säännöllinen, on lauseen 1.4.8 nojalla yhtälöryhmällä $AX = \mathbf{0}$ yksikäsitteinen ratkaisu $X = A^{-1}\mathbf{0} = \mathbf{0}$.

ii) $\Longrightarrow$ iii). Oletetaan, että yhtälöryhmällä $AX = \mathbf{0}$ on vain triviaali ratkaisu. Lauseen 1.5.5 nojalla on olemassa redusoitu porrasmatriisi C, joka on riviekvivalentti A:n kanssa. Lauseen 1.5.7 nojalla myös yhtälöryhmällä $CX = \mathbf{0}$ on vain triviaali ratkaisu.

Koska C on neliömatriisi, niin huomautuksen 1.5.2 nojalla joko $C = I_n$ tai C:ssä on nollarivejä. Jälkimmäisessä tapauksessa homogeenisessa yhtälöryhmässä $CX = \mathbf{0}$ on epätriviaaleja yhtälöitä vähemmän kuin tuntemattomia, joten lauseen 1.5.12 nojalla kyseisellä yhtälöryhmällä on myös epätriviaaleja ratkaisuja, mikä on vastoin ehtoa ii). Siis täytyy olla $C = I_n$.

iii) $\Longrightarrow$ iv). Oletetaan, että A on riviekvivalentti I_n:n kanssa. Seurauksen 1.6.3 nojalla on olemassa alkeismatriisit $E_1, E_2, \ldots, E_k \in \mathbb{R}^{n\times n}$, joilla $I_n = E_k \cdots E_2 E_1 A$. Koska alkeismatriisit ovat säännöllisiä (lemma 1.6.4), seuraa lauseesta 1.4.7 (ja induktiosta), että

$$A = (E_k \cdots E_2 E_1)^{-1} I_n = E_1^{-1} E_2^{-1} \cdots E_k^{-1} I_n = E_1^{-1} E_2^{-1} \cdots E_k^{-1}.$$

Tässä A:n esityksessä tekijät E_j^{-1} ovat 1.6.4:n nojalla alkeismatriiseja.

iv) $\Longrightarrow$ i). Oletetaan, että $A = E_1 E_2 \cdots E_k$, missä E_i:t ovat alkeismatriiseja. 1.4.7:n ja 1.6.4:n nojalla A on säännöllinen (ja $A^{-1} = (E_1 E_2 \cdots E_k)^{-1} = E_k^{-1} \cdots E_2^{-1} E_1^{-1}$). $\square$

Määritelmän mukaan $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ on säännöllinen $\Longleftrightarrow$ on olemassa sellainen $B \in \mathbb{R}^{n\times n}$, että $AB = I_n$ ja $BA = I_n$. Seuraavan tärkeän (ja epätriviaalin) tuloksen mukaan itse asiassa kumpi tahansa näistä kahdesta yhtälöstä riittää yksinkin:

Lause 1.6.6. *Jos A ja B ovat $n \times n$ -matriiseja, ja $AB = I_n$, niin A ja B ovat säännöllisiä, $B = A^{-1}$ ja $A = B^{-1}$; siis myös $BA = I_n$.*

Todistus. Tarkastellaan homogeenista yhtälöryhmää $BX = \mathbf{0}$. Koska $AB = I_n$, voidaan päätellä:

$$BX = \mathbf{0} \Longrightarrow A(BX) = A\mathbf{0} = \mathbf{0} \Longrightarrow (AB)X = \mathbf{0} \Longrightarrow I_n X = \mathbf{0} \Longrightarrow X = \mathbf{0}.$$

Näin ollen yhtälöryhmällä $BX = \mathbf{0}$ on vain triviaali ratkaisu. Lauseen 1.6.5 kohdan ii) nojalla B on säännöllinen, joten on olemassa B^{-1}. Nyt

$$\begin{aligned} AB = I_n \Longrightarrow (AB)B^{-1} = I_n B^{-1} \Longrightarrow A(BB^{-1}) = B^{-1} &\Longrightarrow AI_n = B^{-1} \\ &\Longrightarrow A = B^{-1}. \end{aligned}$$

Siten myös A on säännöllinen ja $A^{-1} = (B^{-1})^{-1} = B$. $\square$

Käänteismatriisin etsiminen.

Laskumenetelmä 1.6.7. *Selvitettävä, onko annettu $n \times n$ -matriisi A säännöllinen, ja myönteisessä tapauksessa määritettävä käänteismatriisi A^{-1}.*

Ratkaisu. Lauseen 1.6.6 nojalla A on säännöllinen täsmälleen silloin, kun on olemassa $n \times n$-matriisi $X = [\,x_{ij}\,]$, jolla $AX = I_n$; tällöin $X = A^{-1}$. Pyritään siis ratkaisemaan matriisiyhtälö $AX = I_n$.

Olkoon $X_j = [\,x_{1j} \quad x_{2j} \quad \ldots \quad x_{nj}\,]^T$ X:n j:s sarake ja $\mathbf{e}_j$ ykkösmatriisin I_n j:s sarake ($j = 1, \ldots n$; $\mathbf{e}_j$:n j:s alkio on 1, muut ovat nollia). Tällöin

$$AX = I_n \Longleftrightarrow AX_j = \mathbf{e}_j \text{ kaikilla } j \in \{1, \ldots, n\}.$$

On siis saatu ratkaistavaksi n lineaarista yhtälöryhmää, joiden kaikkien kerroinmatriisi on A. Nämä yhtälöryhmät voidaan ratkaista yhdellä kertaa seuraavasti:

Muunnetaan $n \times (2n)$ -matriisi $[\,A \mid I_n\,]$ alkeisrivitoimituksilla redusoiduksi $n \times (2n)$ -porrasmatriisiksi $[\,C \mid B\,]$. Tällöin C on redusoidussa porrasmuodossa oleva neliömatriisi, joten 1.4.2:n mukaan on kaksi vaihtoehtoa:

Tapaus 1: $C = I_n$. Yhtälöryhmä $AX_j = \mathbf{e}_j$ on ekvivalentti yhtälöryhmän $X_j = I_n X_j = B_j$ ($=B$:n j:s sarake) kanssa. Yhtälöllä $AX = I_n$ on siis ratkaisu $X = B$, joten A on säännöllinen ja $A^{-1} = B$.

Tapaus 2: C:ssä on nollarivejä. Tässä tapauksessa A ei ole säännöllinen (ks. implikaation ii) $\Longrightarrow$ iii) todistus 1.6.5:ssä). $\square$

Huomautus 1.6.8. Jos A:ta redusoiduksi porrasmatriisiksi muunnettaessa jossain vaiheessa päädytään matriisiin, jossa on nollarivi, myös redusoidussa porrasmatriisissa C on nollarivi; siis A ei tällöin ole säännöllinen. Tällaisessa tapauksessa ei siis tarvitse jatkaa redusoituun porrasmuotoon asti.

Esimerkki 1.6.9. Tutki, onko A säännöllinen, ja myönteisessä tapauksessa määritä A^{-1}, kun

$$\text{a)}\quad A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 1 & -2 & 1 \\ 5 & -2 & -3 \end{bmatrix}, \qquad \text{b)}\quad A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 5 & 5 & 1 \end{bmatrix}.$$

Ratkaisu.

$$\text{(a)}\qquad \left[\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 2 & -3 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 5 & -2 & -3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \underset{(1)}{\rightsquigarrow} \left[\begin{array}{ccc:} 1 & 2 & -3 \\ 0 & -4 & 4 \\ 0 & -12 & 12 \end{array}\right] \underset{(2)}{\rightsquigarrow} \left[\begin{array}{ccc:} 1 & 2 & -3 \\ 0 & -4 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

Siis tuli nollarivi A:n kohdalle, joten A ei ole säännöllinen.

Selitykset. (1) $(-1) \times (1.$ rivi) lisätään 2. riviin ja $(-5) \times (1.$ rivi) lisätään 3. riviin.
(2) $(-3) \times (2.$ rivi) lisätään 3. riviin.

$$\text{(b)}\qquad \left[\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 5 & 5 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \underset{(1)}{\rightsquigarrow} \left[\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{3}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & -4 & -5 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\underset{(2)}{\rightsquigarrow} \left[\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{3}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{5}{4} & 0 & -\frac{1}{4} \end{array}\right] \underset{(3)}{\rightsquigarrow} \left[\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 1 & 0 & -\frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{15}{8} & \frac{1}{2} & \frac{3}{8} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{5}{4} & 0 & -\frac{1}{4} \end{array}\right]$$

$$\underset{(4)}{\rightsquigarrow} \left[\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{13}{8} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{8} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{15}{8} & \frac{1}{2} & \frac{3}{8} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{5}{4} & 0 & -\frac{1}{4} \end{array}\right].$$

Siis matriisin A kohdalle saatiin ykkösmatriisi I_3, joten A on säännöllinen. Lisäksi

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{13}{8} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{8} \\ -\frac{15}{8} & \frac{1}{2} & \frac{3}{8} \\ \frac{5}{4} & 0 & -\frac{1}{4} \end{bmatrix}.$$

Selitykset. (1) $(-5) \times$ (1. rivi) lisätään 3. riviin. 2. rivi kerrotaan luvulla $1/2$.
(2) 3. rivi kerrotaan luvulla $-1/4$.
(3) $(-3/2) \times$ (3. rivi) lisätään 2. riviin ja $(-1) \times$ (3. rivi) lisätään 1. riviin.
(4) $(-1) \times$ (2. rivi) lisätään 1. riviin.