Lineaarialgebra ja matriisilaskenta II — Laskuharjoitus 5 (7-11.12.2009)
Samuli Siltanen

Huom: Laskuharjoitukset sisältävät Matlab-ohjelmalla laskettavia tehtäviä, ja siksi harjoitukset pidetään tietokoneluokassa C128. Poikkeuksena ovat ne harjoitukset, jotka sijoittuvat ajalle 14-18 tiistaina 8.12.; ne pidetään samassa salissa kuin tavallisesti, koska tietokoneluokka on silloin varattu. Näiden ryhmien opiskelijoita kehotetaan osallistumaan tietokonetehtävien osalta johonkin muuhun ryhmään.

Perinteisesti laskettavat tehtävät ovat tällä sivulla ja tietokonetehtävät seuraavilla kahdella sivulla.

1. Olkoon
$$A = \begin{bmatrix} \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} \end{bmatrix}.$$
   (a) Etsi A:n ominaisarvot.
   (b) Etsi A:n ominaisvektorit.
   (c) Kirjoita A muotoon $A = PDP^{-1}$, missä D on diagonaalinen.

2. Olkoon
$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$
   (a) Etsi A:n ominaisarvot ja ominaisvektorit.
   (b) Kirjoita A muotoon $A = PDP^{-1}$, missä D on diagonaalinen.
   (c) Laske potenssi A^{2008} käyttäen hyväksi (b)-kohtaa.

(M1) Määrittele Matlabissa seuraavat matriisit käyttämällä hakasulkunotaatiota. Esim. 2×2-kokoinen yksikkömatriisi voidaan antaa muodossa $[[1,0];[0,1]]$.

$$A = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

$$D = \begin{bmatrix} 7 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad F = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Tarkista määrittelemiesi matriisien koot komennolla `size`.

(M2) Tarkastellaan seuraavaa yhtälöryhmää.

$$\begin{aligned} x + 2y &= 1 \\ -x - y &= -2 \end{aligned}$$

Muodosta kerroinmatriisi A ja oikea puoli $\vec{b}$. Syötä ne Matlabiin nimillä `A` ja `b`. Ratkaise yhtälöryhmä komennolla `inv(A)*b`.

(M3) Tarkasta seuraava kaava Matlabilla.

$$A = \begin{bmatrix} \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}^{-1}.$$

Tutki jokaista neljää matriisia ohjelmalla `kissa.m`. Selvennä itsellesi seuraava tulkinta matriisin A määräämästä lineaarikuvauksesta: ensin vaihdetaan koordinaatistoa, sitten venytetään ensimmäisen koordinaatin suuntaan kertoimella 2 ja lopuksi palataan alkuperäisiin koordinaatteihin.

(M4) Tutkimme matriisin dominoivan (eli itseisarvoltaan suurimman) ominaisarvon ja sitä vastaavan ominaisvektorin määräämistä *potenssimenetelmällä* (Poolen kirjan luku 4.5).

Olkoon

$$A = \begin{bmatrix} 5 & -4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -4 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Nyt A:n ominaisarvojen määrääminen karakterististen nollakohtien avulla on hankalaa, koska viidennen asteen polynomille ei ole ratkaisukaavaa ja polynomin juurien etsiminen numeerisesti ei ole aina helppoa (se on toki mahdollista, mutta virheherkkää etenkin vielä korkea-asteisemmille polynomeille).

Potenssimenetelmä on tällainen:

(i) Valitse alkuarvaukseksi $\vec{x}_0 = \vec{y}_0 \in \mathbb{R}^5$ nollasta poikkeava vektori, jonka alkioista mikään ei ole itseisarvoltaan suurempi kuin 1.

(ii) Toista seuraavia askelia arvoille $k = 1, 2, 3, \ldots$:

  (a) Laske $\vec{x}_k = A\vec{y}_{k-1}$.

  (b) Merkitse m_k:lla vektorin $\vec{x}_k$ itseisarvoltaan suurinta alkiota.

  (c) Aseta $\vec{y}_k = (1/m_k)\vec{x}_k$.

Useimmilla alkuarvausvektorin $\vec{x}_0$ valinnoilla pitäisi käydä niin, että m_k suppenee kohti dominoivaa ominaisarvoa ja $\vec{y}_k$ kohti sitä vastaavaa ominaisvektoria, kun $\to \infty$.

(a) Toteuta yllä oleva menetelmä Matlabilla matriisille A.

(b) Käytä komentoa `[P,D]=eig(A)` saamasi tuloksen tarkastamiseen.

(c) Onnistutko löytämään sellaisen alkuarvausvektorin, että potenssimenetelmä ei suppene?