Lineaarialgebra ja matriisilaskenta II Laskuharjoitus 4 (30.11.-4.12.2009)
Samuli Siltanen

1. Olkoon A neliömatriisi. Osoita:
   (a) Jos A:ssa on nollarivi tai -sarake, niin $\det(A) = 0$.
   (b) Muodostetaan matriisi B kertomalla jotakin A:n riviä vakiolla k. Silloin $\det(B){=}k\det(A)$.
   (c) Muodostetaan matriisi B lisäämällä jokin A:n rivi johonkin A:n toiseen riviin kerrottuna vakiolla k. Silloin $\det(B){=}\det(A)$.

2. Olkoon B mielivaltainen $n \times n$-matriisi ja E alkeismatriisi kokoa $n \times n$. Todista, että $\det(EB) = \det(E)\det(B)$.

3. Olkoon A yläkolmiomatriisi
$$A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ 0 & d & e \\ 0 & 0 & f \end{bmatrix}.$$
   (a) Näytä, että $\det(A) = adf$ eli diagonaalialkioiden tulo.
   (b) Osoita, että A:n diagonaalialkiot ovat sen ominaisarvot.

4. Määrää matriisin
$$A = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 6 & 0 \end{bmatrix}$$
ominaisarvot etsimällä karakteristisen polynomin juuret. Anna kanta kunkin ominaisarvon ominaisavaruudelle.

5. Osoita, että A ja B eivät ole similaariset, kun
$$A = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -5 & 7 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -4 & 6 \end{bmatrix}.$$

6. Olkoon
$$A = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}.$$
   (a) Etsi A:n ominaisarvot.
   (b) Etsi A:n ominaisvektorit.
   (c) Kirjoita A muotoon $A = PDP^{-1}$, missä D on diagonaalinen.