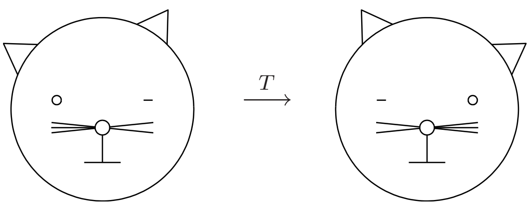
Lineaarialgebra ja matriisilaskenta II, syksy 2009 Laskuharjoitus 2 (16.-20.11.2009)
Samuli Siltanen

1. Osoita, että $w \in \text{span}(\mathcal{B})$, kun
$$\mathcal{B} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} \right\}, \qquad w = \begin{bmatrix} 1 \\ 6 \\ 2 \end{bmatrix}.$$
Mitkä ovat vektorin w koordinaatit kannassa $\mathcal{B}$?

2. Olkoon
$$\mathcal{B} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \right\}.$$
   (a) Osoita, että $\mathcal{B}$ on $\mathbb{R}^2$:n kanta.
   (b) Mitkä ovat standardikantavektorin $\vec{e}_1 \in \mathbb{R}^2$ koordinaatit kannassa $\mathcal{B}$?

3. Olkoon $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ se lineaarikuvaus, joka peilaa vektorin pystysuoran standardikoordinaattiakselin suhteen (kuva).



   (a) Mikä on T:n matriisiesitys standardikannassa?
   (b) Mikä on T:n matriisiesitys tehtävän 2 kannassa $\mathcal{B}$?

4. Osoita, että jos matriisin A sarakkeet ovat lineaarisesti riippumattomat, niin ne muodostavat kannan avaruudelle $\text{col}(A)$.

5. Olkoon A kääntyvä 2×2-matriisi.
   (a) Määrää $\text{null}(A)$.
   (b) Määrää $\text{row}(A)$.
   (c) Määrää $\text{row}(A^T)$.

6. Neliömatriisit A ja B ovat *similaariset*, jos on olemassa sellainen kääntyvä matriisi P, että $P^{-1}AP = B$. Tällöin merkitään $A \sim B$.
Osoita, että similaarisuusrelaatiolle pätee
   (a) $A \sim A$,
   (b) jos $A \sim B$, niin $B \sim A$,
   (c) jos $A \sim B$ ja $B \sim C$, niin $A \sim C$.

Kohdat (a)–(c) toteuttavaa relaatiota kutsutaan *ekvivalenssirelaatioksi*.