Differentiaaliyhtälöt I, harjoitus 3, 23.–25.9.2008, ratkaisut (JL), 4 sivua

1. On etsittävä seuraavien kahden yhtälön yleiset ratkaisut:

(a) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{2x-y+1}{x-2y+1}$. Yhtälössä ja silloin myös sen ratkaisuilta on vaadittava, että $x - 2y + 1 \neq 0$. Hankkiudutaan eroon osoittajan ja nimittäjän vakiotermeistä siirtämällä muuttujanvaihdoksella tason origo suorien $2x - y + 1 = 0$ ja $x - 2y + 1 = 0$ leikkauspisteeseen:

$$\begin{cases} 2x-y+1=0 \\ x-2y+1=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x-y+1=0 \\ 3y-1=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-\frac{1}{3} \\ y=\frac{1}{3} \end{cases}; \qquad \begin{cases} x=u-\frac{1}{3} \\ y=v+\frac{1}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u=x+\frac{1}{3} \\ v=y-\frac{1}{3} \end{cases}.$$

Tällöin $v(u) = y(u-\frac{1}{3})-\frac{1}{3}$, ja ketjusäännön nojalla $dv/du = (dv/dy)(dy/dx)(dx/du) = 1\cdot(dy/dx)\cdot 1 = dy/dx$, joten

$$\frac{dv}{du} = \frac{2(u-\frac{1}{3})-(v+\frac{1}{3})+1}{(u-\frac{1}{3})-2(v+\frac{1}{3})+1} = \frac{2u-v}{u-2v} = \frac{2-\dfrac{v}{u}}{1-2\dfrac{v}{u}},$$

jossa on tehty (väliaikainen) lisäoletus $u \neq 0$ eli $x \neq -\frac{1}{3}$. Saatu yhtälö on tasa-asteinen. Tehdään sijoitus $w(u) = v(u)/u \Leftrightarrow v = uw$, jolloin saadaan separoituva yhtälö:

$$w+uw' = \frac{2-w}{1-2w} \Leftrightarrow uw' = \frac{2-2w+2w^2}{1-2w} \Leftrightarrow -\int \frac{-1+2w}{1-w+w^2}\,dw = \int \frac{2}{u}\,du \Leftrightarrow -\ln(1-w+w^2) = 2\ln|u| + C_0,$$

jossa $1-w+w^2 = (w-\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4} > 0$. Ensin yhdistämällä ja sitten poistamalla logaritmit saadaan implisiittisessä muodossa yleinen ratkaisu:

$$\ln(u^2-u^2w+u^2w^2) = -C_0 \Leftrightarrow u^2-uv+v^2 = C_1 \Leftrightarrow (x+\tfrac{1}{3})^2-(x+\tfrac{1}{3})(y-\tfrac{1}{3})+(y-\tfrac{1}{3})^2 = C_1 \Leftrightarrow$$
$$\underline{x^2+y^2-xy+x-y=C}, \quad \text{jossa } C = e^{-C_0}-\tfrac{1}{3} > -\tfrac{1}{3}.$$

(b) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{-x+4y-11}{3x+2y-9}$. On vaadittava, että $3x + 2y - 9 \neq 0$. Vakiotermien eliminointi:

$$\begin{cases} -x+4y-11=0 \\ 3x+2y-9=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=3 \end{cases}; \qquad \begin{cases} x=u+1 \\ y=v+3 \end{cases}; \qquad \frac{dv}{du} = \frac{-u+4v}{3u+2v} = \frac{-1+4\dfrac{v}{u}}{3+2\dfrac{v}{u}},$$

jossa $u \neq 0$ eli $x \neq 1$. Sijoituksella $w = v/u$ saadaan separoituva yhtälö:

$$w+uw' = \frac{-1+4w}{3+2w} \Leftrightarrow uw' = \frac{-1+w-2w^2}{3+2w} \Leftrightarrow \int \frac{6+4w}{1-w+2w^2}\,dw = -2\int \frac{du}{u}$$
$$\Leftrightarrow \int \frac{-1+4w}{1-w+2w^2}\,dw + \int \frac{7}{\frac{7}{8}+2(w-\frac{1}{4})^2}\,dw = -2\ln|u| + C$$
$$\Leftrightarrow \ln(1-w+2w^2) + 2\sqrt{7}\int \frac{\dfrac{4}{\sqrt{7}}}{1+\left(\dfrac{4w-1}{\sqrt{7}}\right)^2}\,dw = -2\ln|u| + C$$
$$\Leftrightarrow \ln(u^2-u^2w+2u^2w^2) + 2\sqrt{7}\arctan\frac{4w-1}{\sqrt{7}} = C \Leftrightarrow \ln(u^2-uv+2v^2) + 2\sqrt{7}\arctan\frac{4v-u}{u\sqrt{7}} = C$$
$$\Leftrightarrow \underline{\ln(x^2+2y^2-xy+x-11y+16) + 2\sqrt{7}\arctan\frac{-x+4y-11}{(x-1)\sqrt{7}} = C.}$$

2. Optimaalisissa oloissa *E. coli* bakteeripopulaation koko hetkellä $t \geq 0$ min on $N(t) = N_0 e^{rt}$, jossa $N_0 = N(0) > 0$ ja r on populaation Malthuksen parametri. Oletetaan, että populaatio kaksinkertaistuu joka 20. minuutti eli $N(t+20) = 2N(t)$ kullakin $t \geq 0$. Tällöin

$$2 = \frac{N(t+20)}{N(t)} = \frac{N_0 e^{r(t+20)}}{N_0 e^{rt}} = e^{20r} \Leftrightarrow r = \frac{\ln 2}{20} = \frac{0,693}{20} = \underline{0,035}.$$

3. Oletetaan, että populaatio kasvaa logistisen mallin mukaisesti parametrilla $r = 0,5$ ja että alkupopulaation koko on sadasosa (ympäristön) kantokyvystä. Olkoon $N(t)$ populaation koko hetkellä $t \geq 0$, olkoon $N_0 = N(0)$ ja olkoon $K > 0$ kantokyky. Tällöin luentojen mukaan on

$$N(t) = \frac{K}{CKe^{-rt}+1} \qquad \text{eli} \qquad N(t) = \frac{K}{\left(\dfrac{K}{N_0} - 1\right)e^{-rt}+1},$$

sillä sijoittamalla $t = 0$ tulee yhtälö $N_0 = K/(CK+1)$, josta vakiolle CK saadaan arvo $K/N_0 - 1$. Merkitään $n(t) = N(t)/K$. Koska $n(0) = N_0/K = 1/100$ ja $r = 1/2$, niin $n(t) \in \,]0,1[$ ja

$$n(t) = \frac{1}{99e^{-t/2}+1} \Leftrightarrow t = 2\ln\frac{99n(t)}{1-n(t)}.$$

Täten $n(t) \to 1$ aidosti kasvaen, kun $t \to \infty$, ja
(a) $n(t) = 50\% \Leftrightarrow t = 2\ln 99 = \underline{9,19}$,
(b) $n(t) = 90\% \Leftrightarrow t = 2\ln(99 \cdot 9) = \underline{13,6}$,
(c) $n(t) = 99\% \Leftrightarrow t = 2\ln(99 \cdot 99) = \underline{18,4}$.

4. Tutkitaan aluksi SIR-mallia esittäen enemmän yksityiskohtaisia perusteluja kuin luennoissa on.

Olkoon $S(t)$ tartunnalle alttiiden (susceptible) määrä, $I(t)$ sairaana olevien (infected) määrä ja $R(t)$ parantuneiden (recovered tai removed) määrä hetkellä $t \geq 0$. Oletetaan, että populaation koko $N = S + I + R$ on vakio. Olkoon $\beta > 0$ tarttuvuusaste ja $\alpha > 0$ parantumisaste sekä $R_0 = \beta N/\alpha$ kontaktiluku. Olkoon μ syntyvyys- ja samalla kuolevuusaste, ja olkoon p rokotettujen osuus. Oletetaan tässä tehtävässä, että syntyneisyyttä ei tarvitse ottaa huomioon eli että $\mu = 0$. Oletetaan myös, että kellään ei aluksi ole immuniteettisuojaa (sairastaneet ja rokotetut saavat immuniteetin); siis $p = 0$. Tällöin SIR-tautimallissa on

$$\begin{aligned}
\frac{dS}{dt} &= -\beta SI,\\
\frac{dI}{dt} &= \beta SI - \alpha I,\\
\frac{dR}{dt} &= \alpha I.
\end{aligned}$$

Tapauksessa $I(0) = 0$ on tietysti $I(t) = 0$, $S(t) = N$ ja $R(t) = 0$ kaikilla $t \geq 0$. Oletetaan siksi, että $0 < I(0) < N$. Koska $R(0) = 0$, niin $S(0) = N - I(0) > 0$. Selvästi $dS/dt < 0$ aikavälillä $[0, t_\infty[$ jollain $0 < t_\infty \leq \infty$. Siis funktio S on välillä $[0, t_\infty[$ aidosti vähenevä, joten sillä on olemassa äärellinen raja-arvo $S_\infty = \lim_{t \to t_\infty -} S(t) \in [0, N]$. (Mutta onko välttämättä $t_\infty = \infty$? Vai voisiko olla, että $t_\infty < \infty$, $S(t_\infty) = 0$ ja $S(t)$ olisi vaikkapa määritelty myös, kun $t > t_\infty$, mutta olisi negatiivinen ja siis epäbiologinen?) Funktio S on täten bijektio $[0, t_\infty[\to]S_\infty, S(0)]$, ja sillä on aidosti vähenevä ja derivoituva käänteisfunktio $S \mapsto t(S)$, jolla $dt/dS = (dS/dt)^{-1}$. Välillä $]S_\infty, S(0)]$ voidaan siis muodostaa yhdistetty funktio $S \mapsto t \mapsto I$, jolle

$$\frac{dI}{dS} = \frac{dI}{dt}\frac{dt}{dS} = \frac{dI}{dt}\left(\frac{dS}{dt}\right)^{-1} = \frac{\beta SI - \alpha I}{-\beta SI} = -1 + \frac{\alpha}{\beta S}.$$

Määritellään normeeratut suureet $i = I/N$, $s = S/N$, $i_0 = I(0)/N$, $s_0 = S(0)/N$ ja $s_\infty = S_\infty/N$. Tällöin välillä $]s_\infty, s_0]$ on

$$\frac{di}{ds} = \frac{dI}{dS} = \frac{\alpha}{\beta N}\frac{N}{S} - 1 = \frac{1}{R_0 s} - 1,$$

joten

$$i - i_0 = \left(\frac{1}{R_0}\ln s - s\right) - \left(\frac{1}{R_0}\ln s_0 - s_0\right) \qquad \text{eli} \qquad i = i_0 + (s_0 - s) - \frac{1}{R_0}\ln\frac{s_0}{s} = 1 - s - \frac{1}{R_0}\ln\frac{s_0}{s},$$

sillä $i_0 + s_0 = 1$. Täten on olemassa $i_\infty = \lim_{t\to t_\infty -} i(t) = \lim_{s\to s_\infty +} i(s) = 1 - s_\infty - (1/R_0)\ln(s_0/s_\infty)$.

Toisaalta $dR/dt = \alpha I = \alpha N i > 0$, kun $0 \le t < t_\infty$, joten funktio R on kasvava, ja sillä on siis äärellinen raja-arvo $R_\infty \le N$. Mutta on olemassa myös raja-arvo $(dR/dt)_\infty = \lim_{t\to t_\infty -} dR/dt = \alpha N i_\infty \ge 0$. *Oletetaan, että $t_\infty = \infty$.* Silloin ei voi olla $(dR/dt)_\infty > 0$. Täten $i_\infty = (1/\alpha N)(dR/dt)_\infty = 0$.

Yhdistämällä tulokset saadaan yhtälö $0 = 1 - s_\infty - (1/R_0)\ln(s_0/s_\infty)$. *Oletetaan vielä, että infektoituneita oli aluksi vain vähän eli $I(0) \approx 0$.* Tällöin tässä voidaan käyttää arviota $s_0 \approx 1$. Näin saadaan lopullinen yhtälö

$$(*) \qquad s_\infty = 1 + (1/R_0)\ln s_\infty.$$

Olemme kiinnostuneita taudin sairastaneiden lopullisesta suhteellisesta osuudesta $r_\infty = 1 - (i_\infty + s_\infty) = 1 - s_\infty$. Yksi ratkaisu yhtälölle $(*)$ on $s_\infty = 1$, joka vastaa tilannetta $\underline{r_\infty = 0}$ eli tilannetta, jossa tauti ei puhjennut epidemiaksi populaatiossa.

Tutkitaan funktiota $f(x) = x - 1 - (1/R_0)\ln x$ välillä $0 < x \le 1$. Tälle on $f(1) = 0$, $\lim_{x\to 0+} f(x) = \infty$ ja $f'(x) = 1 - (1/R_0)(1/x)$.

Tapaus $R_0 \le 1$. Tällöin $f'(x) < 0$ kaikilla $0 < x < 1$, joten $f(x) > 0$, kun $0 < x < 1$, eikä funktiolla f ole muita nollakohtia kuin $x = 1$ eli yhtälöllä $(*)$ ei ole muita ratkaisuita kuin $s_\infty = 1$. Itse asiassa nyt myös $s_0 = 1$, joten $i \le 1 - s - \ln(s_0/s) = 1 - s + \ln s \le 0$, ja siis vain tapaus $i \equiv 0$ eli $s \equiv 1$, jolloin epidemiaa ei synny, on biologisesti mielekäs.

Tapaus $R_0 > 1$. Tällöin $0 < 1/R_0 < 1$, $f'(1/R_0) = 0$, $f|]0, 1/R_0]$ on aidosti vähenevä ja $f|[1/R_0, 1]$ on aidosti kasvava, joten f:llä on tasan kaksi nollakohtaa, joista toinen on välillä $]0, 1/R_0[$. Tämä antaa toisen juuren s_∞ yhtälölle $(*)$ ja siis sellaisen ratkaisun $r_\infty = 1 - s_\infty \in]1 - 1/R_0, 1[$ tehtävälle, jossa populaatiossa on ollut epidemia.

Tapauksessa $R_0 \gg 1$, jolloin $s_\infty \ll 1$, epidemialliselle ratkaisulle saadaan likiarvo yhtälöstä $0 = 1 + (1/R_0)\ln s_\infty$, nimittäin $s_\infty = e^{-R_0}$.

Nyt esimerkkisairauksissa sairastaneiden osuus $r_\infty = 1 - e^{-R_0}$ populaatiosta on

$$\begin{aligned} 1 - e^{-18} &= 1 - 1{,}5\cdot 10^{-8}, &&\text{kun } R_0 = 18 \text{ (sikotauti)},\\ 1 - e^{\ -7} &= 1 - 9{,}1\cdot 10^{-4}, &&\text{kun } R_0 = \ \ 7 \text{ (vihurirokko)},\\ 1 - e^{-17} &= 1 - 4{,}1\cdot 10^{-8}, &&\text{kun } R_0 = 17 \text{ (tuhkarokko)}. \end{aligned}$$

Täten vain hyvin pieni osuus säästyy sairaudelta. (Onneksi on siis olemassa MPR-rokote: M = measles [tuhkarokko], P = parotitis [sikotauti], R = rubella [vihurirokko]!)

5. Uima-altaassa on vettä $40\,000\ \ell$. Olkoon $x(t)$ klooripitoisuus hetkellä $t \ge 0$ min, jolloin $x(0) = x_0 = 0{,}01\%$. Altaaseen tulee $20\ \ell$/min vettä, jonka klooripitoisuus on $x_1 = 0{,}001\%$. Tämä lisää altaan klooripitoisuutta nopeudella

$$\frac{20\ \ell}{40\,000\ \ell} x_1 \frac{1}{\text{min}} = \frac{x_1}{2000}\frac{1}{\text{min}}.$$

Vettä poistuu samalla nopeudella $20\ \ell$/min, ja se alentaa altaan klooripitoisuutta nopeudella

$$\frac{20\ \ell}{40\,000\ell} x(t) \frac{1}{\text{min}} = \frac{x(t)}{2000}\frac{1}{\text{min}}.$$

Altaan klooripitoisuus muuttuu siis nopeudella

$$x'(t)\frac{1}{\text{min}} = \left(\frac{x_1}{2000} - \frac{x(t)}{2000}\right)\frac{1}{\text{min}}.$$

Täten pätee

$$x'(t) + \frac{1}{2000}x(t) = \frac{x_1}{2000}, \qquad x(0) = x_0.$$

Tämä on lineaarinen alkuarvotehtävä. Yhtälöllä on integroiva tekijä

$$\mu(t) = e^{\int dt/2000} = e^{t/2000},$$

joten $\mu(t)$:llä puolittain kertomalla saadaan ekvivalentti yhtälö

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}\left(e^{t/2000}x(t)\right) = \frac{x_1}{2000}e^{t/2000} \Leftrightarrow \\
&x(t) = e^{-t/2000}\int \frac{x_1}{2000}e^{t/2000}dt = e^{-t/2000}(x_1e^{t/2000} + C) = x_1 + Ce^{-t/2000},
\end{aligned}$$

jolloin alkuehto antaa

$$x(0) = x_0 \Leftrightarrow x_0 = x_1 + C \Leftrightarrow C = x_0 - x_1.$$

Siis

$$x(t) = x_1 + (x_0 - x_1)e^{-t/2000} = (0,001 + (0,01 - 0,001)e^{-t/2000})\% = \frac{1 + 9e^{-t/2000}}{1000}\%.$$

Näin ollen klooripitoisuus tunnin kuluttua on

$$\begin{aligned}
x(60) &= \frac{1 + 9e^{-60/2000}}{1000}\% = \frac{1 + 9e^{-0,03}}{1000}\% \\
&\approx \frac{1 + 9(1 - 0,03)}{1000}\% = \frac{9,73}{1000}\% = \underline{0,0097\%}.
\end{aligned}$$

Veden klooritoisuus taas on $0,002\%$, kun

$$x(t) = 0,002\% \Leftrightarrow \frac{1 + 9e^{-t/2000}}{1000} = \frac{2}{1000} \Leftrightarrow t = 2000\ln 9 = 4394,45 = 73 \cdot 60 + 14,45.$$

eli kun aikaa on kulunut <u>3 d 1 h 14 min</u>.