# Differentiaaliyhtälöt I, syksy 2008, 2. harjoitus
## malliratkaisut (RT)

(1.) Olk. $\frac{1}{M(x,y)}\left(\frac{\partial}{\partial y}M(x,y)-\frac{\partial}{\partial x}N(x,y)\right)\equiv f(y)$.

Väite: Yhtälöllä $M(x,y)+N(x,y)y'=0$ on muotoa $\mu(y)$ oleva integroiva tekijä.

Tod. Olk. $\mu(y)$ mielivaltainen derivoituva funktio.

Nyt $\frac{\partial}{\partial y}(\mu(y)M(x,y))-\frac{\partial}{\partial x}(\mu(y)N(x,y))=\mu'(y)M(x,y)+\mu(y)\frac{\partial}{\partial y}M(x,y)-\mu(y)\frac{\partial}{\partial x}N(x,y)$

$\overset{\text{oletus}}{=}M(x,y)(\mu'(y)+\mu(y)f(y))=0 \Leftrightarrow \mu'(y)+\mu(y)f(y)=0$.

Merk. $\mu'=-f(y)\cdot\mu$. Tämä on separoituva DY ($p(y)=-f(y)$, $q(\mu)=\mu$), jonka ratkaisut saadaan integroimalla ($\mu(y)\neq 0\ \forall y$):

$$\frac{d\mu}{dy}=-f(y)\cdot\mu \Leftrightarrow \int\frac{1}{\mu}d\mu=-\int f(y)\,dy \Leftrightarrow \ln|\mu|=-\int f(y)\,dy,$$

jonka eräs ratkaisu on $\mu(y)=C\cdot e^{-\int_{y_0}^{y}f(\xi)d\xi}$. Valitaan $C=1$.
Siis löydettiin integroiva tekijä $\mu$, joka on muotoa $\mu(y)=e^{-\int_{y_0}^{y}f(\xi)d\xi}$. □

---

(2.) $y+(2y^3-x)y'=0$. Yhtälöllä on triviaaliratkaisu $y\equiv 0$.
Merk. $M(x,y)=y$, $N(x,y)=2y^3-x$. Nyt $\frac{1}{M(x,y)}\left(\frac{\partial}{\partial y}M(x,y)-\frac{\partial}{\partial x}N(x,y)\right)=\frac{1}{y}(1-(-1))$
$=\frac{2}{y}=f(y)$, kun $y\neq 0$.

Tehtävän 1 nojalla $\exists$ integroiva tekijä $\mu$ s.e.
$\frac{\partial}{\partial y}(\mu(y)M(x,y))=\frac{\partial}{\partial x}(\mu(y)N(x,y))$ ja joka on muotoa $\mu(y)=e^{-\int_{y_0}^{y}f(\xi)d\xi}$

Tässä (val. $y_0=\pm 1$) $\underline{\mu(y)}=e^{-\int_{\pm1}^{y}\frac{2}{\xi}d\xi}=e^{-2\int_{\pm1}^{y}\ln|\xi|}=e^{-2(\ln|y|+\ln 1)}=e^{-2\ln|y|}=\underline{y^{-2}}$ (alueissa $y\gtrless 0$!).

Nyt $\frac{\partial}{\partial y}\overbrace{(\mu(y)M(x,y))}^{\equiv M_1(x,y)}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{y^2}\cdot y\right)=\frac{\partial}{\partial y}y^{-1}=-y^{-2}$ ja

$\frac{\partial}{\partial x}\overbrace{(\mu(y)N(x,y))}^{\equiv N_1(x,y)}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{y^2}(2y^3-x)\right)=\frac{\partial}{\partial x}\left(2y-\frac{x}{y^2}\right)=-y^{-2}$.

Siis yhtälö $M_1(x,y)+N_1(x,y)y'=0$ on eksakti, joka osataan ratkaista.
Val. $x_0=0$. Tällöin $g(y)=\int^{y}N_1(0,t)dt=\int^{y}2t\,dt=y^2+C_1$ (val. $C_1=0$) ja
$\int_0^x M_1(t,y)\,dt=\int_0^x\frac{1}{y}dt=\frac{x}{y}$, joten eksaktin yhtälön yleinen ratkaisu (joka toteuttaa myös alkuperäisen yhtälön) on $\underline{\frac{x}{y}+y^2=C,\ C\in\mathbb{R}}$ (*).

Tarkastellaan sitten implisiittiyhtälön ratkaisuja vakion $C$ eri arvoilla.

2. jatkuu.. Ratkaistaan implisiittiyhtälöstä (*) ensin $x(y)$:
$x+y^3 = Cy \Leftrightarrow x(y) = Cy - y^3 \Rightarrow x(0)=0$, $\frac{dx}{dy} = C - 3y^2$.

Kun $C=0$, niin $y(x) = -\sqrt[3]{x}$ ja $\left|\frac{dy}{dx}\right| \to \infty$, kun $x \to 0$.

Jos $C>0$, niin $\frac{dx}{dy} > 0 \Leftrightarrow |y| < a = \sqrt{C/3}$. Merk. $b = x(a) = \frac{2C}{3}\sqrt{C/3}$.
Tällöin ratkaisuille maksimaalisilla väleillä on
$y : ]-b, b[ \to ]-a, a[$, aid. kasv.
$y : ]-b, \infty[ \to ]-\infty, -a[$, aid. väh.
$y : ]-\infty, b[ \to ]a, \infty[$, aid. väh.

Kun $C<0$, niin $\frac{dx}{dy} < 0$ $\forall y \in \mathbb{R}$, $\lim_{y\to\infty} x(y) = -\infty$, $\lim_{y\to-\infty} x(y) = \infty$, joten

$\exists$ ratkaisu $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, joka on aidosti vähenevä bijektio, $y(0)=0$.
Huomautus: Joskus integroivalla tekijällä saatuja ratkaisuja voidaan laajentaa siten, että ne saavat arvon 0!

---

3. a. $y' + 2xy = 2xe^{-x^2}$ Vastaavan homogeeniyhtälön integroiva tekijä $\mu$: $\mu(y) = e^{\int 2x\,dx} = e^{x^2}$. Nyt $\frac{d}{dx}(e^{x^2}y) = e^{x^2}y' + 2xe^{x^2}y = 2xe^{-x^2}e^{x^2}$
$\Leftrightarrow \frac{d}{dx}(e^{x^2}y) = 2x \Leftrightarrow e^{x^2}y = x^2 + C \Leftrightarrow y = x^2e^{-x^2} + Ce^{-x^2}$

II tapa: kaavalla $y(x) = Ce^{-\int^x p(\xi)d\xi} + \int_{x_0}^{x} e^{-\int_z^x p(\xi)d\xi} \cdot q(z)\,dz$
(Tässä $p(x) = 2x$ ja $q(x) = 2xe^{-x^2}$)

b. $(1+x^2)y' - 2xy = (1+x^2)^2 \quad |: (1+x^2) \quad (\neq 0)$

$\Leftrightarrow y' - \frac{2x}{1+x^2} \cdot y = 1 + x^2$ (*) Tätä vastaavan homogeeniyhtälön yleinen ratkaisu on $y = C \cdot e^{\int \frac{2x}{1+x^2}dx} = C \cdot e^{\ln(1+x^2)} = C(1+x^2)$.
Vakion variointi: Sijoitetaan $y(x) = C(x)(1+x^2)$ yhtälöön (*):
$C'(x)(1+x^2) + C(x) \cdot 2x - \frac{2x}{1+x^2} \cdot C(x)(1+x^2) = 1 + x^2$
$\Leftrightarrow C'(x) = 1 \Leftarrow C(x) = x + C$. Näin ollen täydellisen yhtälön yleinen ratkaisu on muotoa $y(x) = (x+C)(1+x^2)$.

(3.) c. $y'\sin x - y = 1-\cos x \overset{x\neq n\pi}{\iff} y' - \frac{1}{\sin x}\cdot y = \frac{1-\cos x}{\sin x}$ (*).

Koska vaaditaan, että $x \neq n\pi$, niin ratkaisuvälit ovat sinin kahden peräkkäisen nollakohdan rajaamia, ts. tutkitaan välejä $]n\pi, (n+1)\pi[$, missä $n$ on kok. luku. Näillä väleillä $|\cos x|<1$. Lasketaan yhtälöä (*) vastaavan HY:n int. tekijä $\mu(x) = e^{\int^x p(x)dx}$. Huomataan, että $\int -\frac{1}{\sin\xi}d\xi = -\int\frac{\sin\xi}{\sin^2\xi}d\xi = -\int\frac{\sin\xi}{1-\cos^2\xi}d\xi$. Sijoitetaan tähän $t=\cos\xi$, $dt=-\sin\xi\, d\xi$, jolloin

$$\int -\frac{1}{\sin\xi}d\xi = \int\frac{dt}{1-t^2} = \frac{1}{2}\int\left(\frac{1}{1+t}+\frac{1}{1-t}\right)dt = \frac{1}{2}\ln\frac{1+t}{1-t} \overset{t=\cos\xi}{=} \frac{1}{2}\ln\frac{1+\cos\xi}{1-\cos\xi}$$

$$= \frac{1}{2}\ln\frac{(1+\cos\xi)^2}{1-\cos^2\xi} = \ln\frac{1+\cos\xi}{|\sin\xi|}.$$

HY:n integroiva tekijä on siis $\mu(x) = \frac{1+\cos x}{\sin x}$.
(Itseisarvomerkit voi jättää pois, sillä välillä $]n\pi,(n+1)\pi[$ sini ei vaihda merkkiä, joten niillä väleillä missä $\sin x<0$ voidaan valita integroivaksi tekijäksi $-\mu(x)$.)

Nyt $\frac{d}{dx}\left(\frac{1+\cos x}{\sin x}\cdot y\right) = \left(\left(-\sin x\cdot\frac{1}{\sin x} + (1+\cos x)(-1)(\sin x)^{-2}\cdot\cos x\right)y + \frac{1+\cos x}{\sin x}y'\right)$

$$= \frac{1+\cos x}{\sin x}y' + \frac{-\sin^2 x - \cos x - \cos^2 x}{\sin^2 x}\cdot y = \frac{1+\cos x}{\sin x}y' - \frac{1+\cos x}{\sin^2 x}y$$

$$= \underbrace{\frac{1+\cos x}{\sin x}\cdot\frac{1-\cos x}{\sin x}}_{=\frac{1-\cos^2 x}{\sin^2 x} = \frac{\sin^2 x}{\sin^2 x} = 1} \iff \frac{1+\cos x}{\sin x}\cdot y = x + C,\ C\in\mathbb{R}$$

Siis yhtälön (*) yleinen ratkaisu on $\underline{y(x) = (x+C)\frac{\sin x}{1+\cos x}}$, $C\in\mathbb{R}$.

---

(4.) a. $xy' + 2y = x^3$, $y(1)=1 \overset{x\neq 0}{\iff} y' + \frac{2}{x}\cdot y = x^2$ on 1. kertaluvun DY, ratkaisuvälinä puolisuora $x>0$.

Alkuarvotehtävän yleinen ratkaisu saadaan kaavalla (tässä $y_0=x_0=1$):

$$\underline{y(x)} = 1\cdot e^{-\int_1^x\frac{2}{\xi}d\xi} + \int_1^x e^{-\int_z^x\frac{2}{\xi}d\xi}\cdot z^2\,dz = e^{-2(\ln x - \ln 1)} + \int_1^x e^{-2(\ln x - \ln z)}\cdot z^2\,dz$$

$$= x^{-2} + \int_1^x x^{-2}\cdot z^2\cdot z^2\,dz = x^{-2} + x^{-2}\Big/_1^x \frac{1}{5}z^5 = x^{-2} + x^{-2}\left(\frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{5}\right)$$

$$= x^{-2} + \frac{1}{5}(x^3 - x^{-2}) = \underline{\frac{4}{5}x^{-2} + \frac{1}{5}x^3}$$

4\. a. II tapa: Vastaavan homogeeniyhtälön integroiva tekijä:
$\mu(x) = e^{\int^x \frac{2}{t} dt} = e^{2\ln|x|} = x^2$. Nyt $\frac{d}{dx}(x^2 \cdot y) = x^2 \cdot y' + 2xy = x \cdot x^3 = x^4$

$\Rightarrow x^2 y = \frac{1}{5}x^5 + C \Leftrightarrow y = \frac{1}{5}x^3 + Cx^{-2}$ (TY:n yl. ratk.)
Alkuehto: $y(1) = 1 \Leftrightarrow \frac{1}{5} + C = 1 \Leftrightarrow C = \frac{4}{5}$.
Näin ollen $\underline{y(x) = \frac{1}{5}x^3 + \frac{4}{5}x^{-2}}$.

b. $y' + y \cdot \cos x = \sin x \cdot \cos x$, $y(0) = 1$. Nyt $\mu(x) = e^{\int \cos x \, dx} = e^{\sin x}$
ja $\frac{d}{dx}(e^{\sin x} \cdot y) = (e^{\sin x} \cdot \cos x) \sin x$, josta

$$e^{\sin x} \cdot y = \int \underbrace{(e^{\sin x} \cdot \cos x)}_{f'} \underbrace{\sin x}_{g} \, dx \overset{\text{os.int.}}{=} e^{\sin x} \cdot \sin x - \int e^{\sin x} \cdot \cos x \, dx$$

$$= e^{\sin x} \cdot \sin x - e^{\sin x} + C$$

$\Leftrightarrow y(x) = \sin x - 1 + C \cdot e^{-\sin x}$
Alkuehto $y(0) = \sin 0 - 1 + C \cdot e^{-\sin 0} = -1 + C = 1 \Leftrightarrow C = 2$.
Siis $\underline{y(x) = 2e^{-\sin x} + \sin x - 1}$.

---

5\. $y' + P(x)y = (x+1)^2 e^x$ (*). Yhtälön eräs ratkaisu on $y_1 = (x^2-1)e^x$. Sijoitetaan tämä yhtälöön (*) ($y_1' = (x^2-1)e^x + 2xe^x$), jotta saadaan ratkaistua $P(x)$:
$$(x^2-1)\cancel{e^x} + 2x\cancel{e^x} + P(x)(x^2-1)\cancel{e^x} = (x+1)^2\cancel{e^x}$$
$$\Leftrightarrow P(x) = \frac{(x+1)^2 - (x^2-1) - 2x}{(x^2-1)} = \frac{\cancel{x^2} + \cancel{2x} + 1 - \cancel{x^2} + 1 - \cancel{2x}}{x^2-1} = \frac{2}{x^2-1} \quad (x \neq \pm 1).$$
Yhtälön (*) yleinen ratkaisu on yksittäisratkaisun $y_1$ ja vastaavan HY:n ($y' + P(x)y = y' + \frac{2}{x^2-1} \cdot y = 0$) yl. ratkaisun summa.
Yhtälö $y_0' = -\frac{2}{x^2-1} \cdot y_0 = \frac{2}{1-x^2} \cdot y_0$ on separoituva; yleinen ratkaisu:
$$y_0' = \frac{2}{1-x^2} \cdot y_0 \Leftrightarrow \int \frac{dy}{y_0} = \int \frac{2}{1-x^2} dx \Leftrightarrow \ln|y_0| = \int \left( \frac{1}{1+x} + \frac{1}{1-x} \right) dx$$
$$\Leftrightarrow \ln|y_0| = \ln|1+x| - \ln|1-x| + C_0 \Leftrightarrow |y_0| = e^{\ln|1+x|} \cdot e^{\ln\frac{1}{|1-x|}} \cdot e^{C_0}, \ C_0 \in \mathbb{R}$$
$$\Leftrightarrow y_0 = C \cdot \frac{1+x}{1-x}, \text{ missä } C = \pm e^{C_0}.$$

Siis yhtälön (*) yleinen ratkaisu on $y(x) = (x^2-1)e^x + C \cdot \frac{1+x}{1-x}$, $C \in \mathbb{R}$, $x \neq \pm 1$.

---

(6.) $\frac{dy}{dx} = \frac{x+y}{x-y} \iff y' = \frac{1+\frac{y}{x}}{1-\frac{y}{x}} \equiv f(\frac{y}{x})$. Yhtälö on tasa-asteinen, kun $f(t) = \frac{1+t}{1-t}$. Sijoitetaan $v = \frac{y}{x} \Rightarrow v' = \frac{f(v)-v}{x} = \frac{1}{x}\left(\frac{1+v}{1-v} - v\right)$

$\iff v' = \frac{1}{x}\left(\frac{1+v^2}{1-v}\right)$ (on separoituva) $\iff \int \frac{1-v}{1+v^2} dv = \int \frac{1}{x} dx$

$\iff \int \left(\frac{1}{1+v^2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{2v}{1+v^2}\right) dv = \ln|x| + C_0 \iff \arctan v - \frac{1}{2}\ln(1+v^2) = \ln|x| + C_0$

$\iff 2\arctan v = \ln\left(|x|^2(1+v^2)\right) + 2C_0 \iff e^{2\arctan v} = C \cdot x^2(1+v^2)$.

Sijoitetaan takaisin $v = \frac{y}{x}$, joten saadaan implisiittiratkaisu

$\underline{e^{2\arctan(\frac{y}{x})}} = C \cdot x^2\left(1+\frac{y^2}{x^2}\right) = \underline{C(x^2+y^2)}$.

---

(7.) Bernoulli: $y' + 2xy + xy^4 = 0 \iff y' + 2xy = -xy^4$ $(*)$.

Triviaaliratkaisu $y(x) = 0$ $\forall x \in \mathbb{R}$. Olk. sitten $y \neq 0$:

$(*) \iff y^{-4}y' + 2xy^{-3} = -x$. Sijoitetaan $v = y^{-3}$, $v' = -3y^{-4}y'$

$\Rightarrow -\frac{1}{3}v' + 2xv = -x \iff v' - 6xv = 3x$ (on lin. 1. kertaluvun DY).

Nyt yhtälön yleinen ratkaisu saadaan kaavalla (val. $x_0 = 0$):

$v(x) = C_0 e^{-\int_0^x -6\xi d\xi} + \int_0^x e^{-\int_z^x -6\xi d\xi} \cdot 3z\, dz = C_0 e^{3x^2} + \int_0^x e^{3(x^2-z^2)} \cdot 3z\, dz$

$= C_0 e^{3x^2} - \frac{1}{2}\int_0^x e^{3x^2} \cdot e^{-3z^2}(-6z)dz = C_0 e^{3x^2} - \frac{1}{2}e^{3x^2}(e^{-3x^2} - e^0)$

$= C_0 e^{3x^2} - \frac{1}{2}e^{3x^2} \cdot e^{-3x^2} + \frac{1}{2}e^{3x^2} = \underbrace{(C_0 + \tfrac{1}{2})}_{\equiv C} e^{3x^2} - \frac{1}{2} = Ce^{3x^2} - \frac{1}{2}, C \in \mathbb{R}$.

Sijoittamalla takaisin $v = y^{-3}$ saadaan $\underline{y(x) = (Ce^{3x^2} - \frac{1}{2})^{-\frac{1}{3}}}$ $(C \in \mathbb{R})$.

<u>II tapa</u>: Nyt yhtälöllä $v' - 6xv = 3x$ on muotoa $\mu(x) = e^{-\int 6x dx} = e^{-3x^2}$ oleva integroiva tekijä ja siis $\frac{d}{dx}(e^{-3x^2}v) = 3xe^{-3x^2}$, joten

$e^{-3x^2}v = -\frac{1}{2}e^{-3x^2} + C$, $C \in \mathbb{R}$. Nyt $v = y^{-3} = -\frac{1}{2} + Ce^{3x^2}$

$\iff \underline{y(x) = (Ce^{3x^2} - \frac{1}{2})^{-\frac{1}{3}}}$, $C \in \mathbb{R}$.