

Differentiaaliyhtälöt I

5. harjoitus, syksy 2008

- Oletetaan, että sikotauti, vihurirokko ja tuhkarokko leviävät SIR-mallin mukaisesti ja että tautien keskimääräinen kesto on kaksi viikkoa. Empiirisesti on todettu että näille taudeille R_0 :n arvo on 18 (sikotauti), 7 (vihurirokko), ja 17 (tuhkarokko). Tarkastellaan populaatiota, jossa henkilön eliniän odotusarvo on 85 vuotta ja jossa osuus p vastasyntyneistä rokotetaan tautia vastaan. Millä rokotuskattavuudella p taudit voidaan eliminoida? Laske keskimääräinen ikä jolloin henkilö sairastuu tautiin kun (a) ketään ei rokoteta, (b) rokotuskattavuus ei riitä taudin eliminomiseen.
- (a) Ratkaise alkuarvotehtävä

$$\frac{dx}{dt} = 30x(1 - x), \quad x(0) = 0.2$$

tarkasti sekä evaluoi ratkaisu pisteissä $t = 0.1, 0.2, 0.3$ ja 0.4 .

- (b) Ratkaise (a)-kohdan tehtävä numeerisesti Eulerin menetelmällä askelpituudella $h = 0.1$. Vertaa tulosta (a)-kohdan tarkkaan ratkaisuun.
- Ratkaise alkuarvotehtävä

$$\frac{dy}{dx} = y\sqrt{1 - y}, \quad y(0) = 0.5$$

numeerisesti Eulerin menetelmällä.

- Tutki diskreetin dynaamisen systeemin

$$x_{n+1} = \mu x_n(1 - x_n)$$

käyttäytymistä parametrin arvoilla (a) $\mu = 3.1$, (b) $\mu = 3.5$, (c) $\mu = 3.7$ ja (d) $\mu = 3.835$.