Differentialekvationer I

Räkneövning 4, höstterminen 2008

1. Bestäm de allmänna lösningarna till följande differentialekvationer.

   (a) $\ddot{x} - 5\dot{x} + 6x = 0$,

   (b) $\ddot{x} + 4\dot{x} + 4x = 0$,

   (c) $\ddot{x} + 2\dot{x} + 10x = 0$.

2. Lös följande begynnelsevärdesproblem.

   (a) $\ddot{x} + \dot{x} + x = t, \quad x(0) = \dot{x}(0) = 0$,

   (b) $\ddot{x} + 4x = 0, \quad x(0) = 0, \quad \dot{x}(0) = 1$,

   (c) $\ddot{x} + 2\dot{x} + x = e^{-t}, \quad x(0) = 1, \quad \dot{x}(0) = 1$.

3. På föreläsningarna har visats, att den allmänna lösningen till ekvationen

$$\ddot{x} + \omega^2 x = 0$$

   för den harmoniska oskillatorn är $x(t) = C_1 \cos \omega t + C_2 \sin \omega t$, där C_1 och C_2 är konstanter som kan anta godtyckliga värden. Visa, att den allmänna lösningen alternativt kan skrivas $x(t) = A \cos(\omega t + \delta)$

   (a) genom att substituera $x(t) = A \cos(\omega t + \delta)$ i ekvationen;

   (b) med hjälp av formeln $\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta$.

   Uttryck *amplituden* A och *fasförskjutningen* δ som funktioner av integrationskonstanterna C_1 och C_2.

4. Betrakta ekvationen

$$\ddot{x} + 2x^3 - x = 0.$$

   (a) Skriv ekvationen som ett system av första ordningens ekvationer för variablerna x och $v := \dot{x}$.

   (b) Bestäm systemets jämviktslägen.

   (c) Härled en differentialekvation för $v(x)$ och lös denna.

   (d) Rita ett fasdiagram (dvs. rita lösningskurvorna i xv-planet och ange varje kurvas riktning med en pil).

   (e) Använd fasdiagrammet till att sluta dig till att alla lösningar är begränsade, att origo är en sadelpunkt och att de övriga jämviktslägena är stabila.

5. Lös begynnelsevärdesproblemet

$$\ddot{x} + 3\dot{x} + 2x = e^t \cos t, \quad x(0) = \dot{x}(0) = 0$$

   med hjälp av metoden för variation av konstanter.