Tavalliset differentiaaliyhtälöt

Mats Gyllenberg, Petri Ola, Petteri Piiroinen
Matematiikan ja tilastotieteen laitos
00014 Helsingin yliopisto

10. lokakuuta 2007

Luku 1

Ensimmäisen kertaluvun yhtälöt

1.1 Johdanto

Esimerkki 1.1 (Radioaktiivinen hajoaminen)**.** Olkoon $A(t)$ annetun aineen radioaktiivisuuden säteilyintensiteetti ajan hetkellä t. Oletetaan, että säteilyintensiteetin muutos on verrannollinen intensiteetin arvo. Tällöin funktion $A(t)$ aikakehitystä kuvaa yhtälö

$$A'(t) = -kA(t), \tag{1.1}$$

missä k on verranollisuusvakio. On luonnollista olettaa, että $A(t)$ on ajan suhteen vähenevä funktio, ja tämän lisäksi oletamme vielä että se on aina positiivinen, eli $A'(t) < 0$ ja $k > 0$. Koska jokaisella $f \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}_+)$ on voimassa

$$\frac{d \ln f(t)}{dt} = \frac{f'(t)}{f(t)},$$

niin voimme ratkaista differentiaaliyhtälön seuraavasti:

$$\begin{aligned} A'(t) = -kA(t) &\iff \frac{A'(t)}{A(t)} = -k \\ &\iff \frac{d \ln A(t)}{dt} = -k \\ &\iff \int \frac{d \ln A(t)}{dt}\, dt = -\int k\, dt \\ &\iff \ln A(t) = -kt + C_1 \\ &\iff A(t) = e^{C_1} e^{-kt} = C_2 e^{-kt}. \end{aligned}$$

Huomaamme, että differentiaaliyhtälön (1.1) ratkaisu $A(t)$ ei ole yksikäsitteinen, vaan riippuu mielivaltaisia positiivisia arvoja saavasta parametrista C_2. Tämä on täysin luonnollista, sillä jos F of funktion f integraalifunktio, niin onhan $F + C$ (C vakio) myös f:n integraalifunktio.

Jos intensiteetti $A(t)$ tunnetaan ajanhetkellä $t = 0$:

$$A(0) = A_0, \tag{1.2}$$

niin integroimisvakio C_2 voidaan määrittää:

$$A_0 = A(0) = C_2 e^{-k \cdot 0} = C_2 \Longleftrightarrow C_2 = A_0,$$

Tehtävää (1.1) & (1.2) kutsutaan *alkuarvotehtäväksi* ja sen ratkaisu on siis

$$A(t) = A_0 e^{-kt}.$$

Lisäksi huomataan, että jos $A_0 > 0$, niin oletuksemme $A(t) > 0$ kaikilla t toteutuu ja vaimeneminen on eksponentiaalista.

Esimerkki 1.2. Tarkastellaan hiukkasta, jonka massa on m ja joka liikkuu pitkin pystysuoraa x-akselia. Oletetaan, että painovoiman lisäksi hiukkaseen vaikuttaa nopeuteen suoraan verrannollinen voima (verrannollisuuskertoimena $k > 0$), joka vastustaa hiukkasen liikettä. Newtonin liikeyhtälö saa tällöin muodon (x-akselin positiivinen suunta on alaspäin):

$$m\ddot{x} = mg - k\dot{x}. \tag{1.3}$$

Käytämme tässä Newtonin merkintää aikaderivaatalle, eli $\dot{x} = \frac{dx}{dt}$ on siis hiukkasen nopeus ja $\ddot{x} = \frac{d^2x}{dt^2}$ sen kiihtyvyys, luonnollisesti g on Maan painovoiman kiihtyvyys.

Kun merkitään $v = \dot{x}$ ja $\alpha = \frac{k}{m}$, niin liikeyhtälö (1.3) voidaan kirjoittaa muodossa

$$\frac{dv}{dt} = g - \alpha v.$$

Voisimme menetellä nyt samalla tavalla kuin esimerkissä 1.1, mutta vaihtelun vuoksi ratkaisemme yhtälön toisella tavalla. Ryhmittelemällä termejä ja kertomalla puolittain tekijällä $e^{\alpha t}$ saamme yhtälön

$$e^{\alpha t} v'(t) + \alpha e^{\alpha t} v(t) = g e^{\alpha t}. \tag{1.4}$$

Nyt huomataan että ylläolevan yhtälön vasen puoli on funktion $e^{\alpha t} v(t)$ derivaatta, joten integromailla ajan suhteen saadaan

$$e^{\alpha t} v(t) = \frac{g}{\alpha} e^{\alpha t} + C_1,$$

eli

$$v(t) = \frac{g}{\alpha} + C_1 e^{-\alpha t},$$

ja integroimalla vielä kerran saadaan yhtälön (1.3) ratkaisuksi

$$x(t) = C_2 + \frac{g}{\alpha} t - \frac{C_1}{\alpha} e^{-\alpha t} \tag{1.5}$$

Ratkaisu sisältää siis kaksi parametria C_1 ja C_2. Tämä johtuu tietysti siitä, että differentiaaliyhtälössa (1.3) esiintyy ensimmäisen derivaatan lisäksi myös tuntemattoman funktion x toinen derivaatta. Yksikäsitteisyyden takaamiseksi tarvitaan nyt *kaksi* alkuarvoa. Jos esimerkiksi hiukkanen lähtee liikkeelle levosta origosta, niin alkuehdot ovat $x(0) = 0$ ja $v(0) = 0$. Kun nyt sijoitetaan v:n lausekkeeseen $t = 0$, niin saadaan $C_1 = -g/\alpha$, jonka jälkeen (1.5) antaa $C_2 = -g/\alpha^2$. Alkuarvotehtävän ratkaisu on siis

$$x(t) = -\frac{g}{\alpha^2} + \frac{g}{\alpha} t + \frac{g}{\alpha^2} e^{-\alpha t} = \frac{g}{\alpha} t - \frac{g}{\alpha^2}(1 - e^{-\alpha t}).$$

Määritellään seuraavaksi joitakin käsitteitä (joita tosin emme tarvitse kuin intuitiivisen kuvan vahvistamiseksi):

Määritelmä 1.3. (a) Olkoon F sopivassa $\mathbb{R}^{n+2}$:n osajoukossa määritelty reaaliarvoinen funktio. Relaatiota

$$F\left(x, y(x), \ldots, \frac{d^n y(x)}{dx^n}\right) = 0 \tag{1.6}$$

kutsutaan *(tavalliseksi) differentiaaliyhtälöksi*. Korkeimman esiintyvän derivaatan kertaluku n on differentiaaliyhtälön *kertaluku*.

(b) Välillä $I \subseteq \mathbb{R}$, n kertaa derivoituva funktio $y = y(x)$ on differentiaaliyhtälön (1.6) *ratkaisu* välillä I jos (1.6) pätee kaikille $x \in I$.

(c) Kertalukua n olevan diffferentiaaliyhtälön ratkaisujen joukkoa, joka riippuu n:stä mielivaltaisia arvoja saavasta oleellisesta parametrista, kutsutaan kyseisen yhtälön *yleiseksi ratkaisuksi*.

Huomautus 1.4. Määritelmässä 1.3 (c) sana "oleellinen" tarkoittaa, ettei parametrien lukumäärää voida vähentää esimekiksi käyttämällä uusia merkintöjä. Lausekkeessa $y(x) = C_1 C_2 e^x$ on siten vain yksi oleellinen parametri. On myös mahdollista, että differentiaaliyhtälöllä on ratkaisuja, jotka eivät sisälly yleiseen ratkaisuun.

1.2 Ensimmäisen kertaluvun separoituvat yhtälöt

Aloitetaan seuraavalla määritelmällä:

Määritelmä 1.5. Ensimmäisen kertaluvun DY on *separoituva*, jos se voidaan kirjoittaa muodossa

$$y'(x) = p(x)q(y) \tag{1.7}$$

joillakin yhden muuttujan funktiolla p ja q.

Tarkastellaan käsitettä muutamalla esimerkillä.

Esimerkki 1.6. *a*) Esimerkin 1.1 yhtälö A:lle on separoituva, sillä

$$A'(t) = -kA(t) = p(t)q(A(t)),$$

kun valitaan esimerkiksi $p(t) = -k$ ja $q(s) = s$.

b) Yhtälö

$$y' = \frac{2x + xy}{y^3 + 1}$$

on myöskin separoituva, sillä

$$\frac{2x + xy}{y^3 + 1} = x\frac{2 + y}{y^3 + 1} = p(x)q(y),$$

kun

$$p(x) = x, \quad q(y) = \frac{2 + y}{y^3 + 1}.$$

c) Yhtälö $y' = 1 + xy$ *ei ole* separoituva. Perustelun tälle jätämme harjoitustehtäväksi. Samoin voi miettiä sitä, kuinka yksikäsitteinen esitys separoituvana yhtälönä on. Eli jos kaikilla x, y pätee $p_1(x)q_1(y) = p_2(x)q_2(y)$, niin mikä on funktioiden p_1 ja p_2, sekä vastaavasti funktioiden q_1 ja q_2 yhteys toisiinsa.

Formaalisti käyttämällä differentiaalimuotoilua separoituva yhtälö voidaan ajatella ratkaistavan seuraavasti:

$$\frac{dy}{dx} = p(x)q(y) \Longleftrightarrow \frac{dy}{q(y)} = p(x)dx \Longrightarrow \int^y \frac{dy}{q(y)} = \int^x p(x)dx.$$

Tehdään sama hieman tarkemmin. Eli oletetaan, että välillä $I \subset \mathbb{R}$ funktio $q(y) \neq 0$ (tähän oletukseen palataan myöhemmin) ja merkitään

$$h(y) = \frac{1}{q(y)}.$$

Tällöin differentiaaliyhtälö (1.7) saa muodon

$$h(y(x))y'(x) = p(x) \tag{1.8}$$

Olkoon nyt H funktion h integraalifunktio ja P funktion p integraalifunktio. Tällöin yhtälö (1.8) voidaan ketjusäännön nojalla kirjoittaa muodossa

$$\frac{dH(y(x))}{dx} = \frac{dP(x)}{dx} \Longleftrightarrow H(y(x)) = P(x) + C, \tag{1.9}$$

jollakin vakiolla C, eli formaalin differentiaallimuotoilulla saadun ratkaisun kanssa yhtäpitävä lopputulos. Tämä on ns. *implisiittinen ratkaisu*, ja yleisesti ei parempaan lopputulokseen pääse. Kuten allaolevista esimerkeistä huomaamme, on usein kuitenkin mahdollista ratkaista $y(x)$:n arvot eksplisiittisesti. Aina tämä ei kuitenkaan onnistu, ja usein se ei edes ole tarpeen, vaan ratkaisun olennaiset ominasuudet näkyvät jo implisiittisestä muodosta.

Esimerkki 1.7. Ratkaistaan yhtälö

$$y' = \frac{x-5}{y^2}.$$

Tämä on separoituva valinnalla $p(x) = x - 5$, $q(y) = y^{-2}$. Nyt $q(y) \neq 0$, kun $y \neq 0$ ja jos $y = 0$ ei lauseke edes ole määritelty. Differentiaalinotaatiolla

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x-5}{y^2} \Longleftrightarrow y^2 dy = (x-5)dx \Longrightarrow \int^y y^2 dy = \int^x (x-5)dx$$
$$\Longleftrightarrow \frac{1}{3}y^3 = \frac{1}{2}x^2 - 5x + C_1, \quad C_1 \in \mathbb{R}.$$

Tämä antaa ratkaisun implisiittisesti, mutta voimme edelleen ratkaista funktion y ottamalla kuutiojuuren

$$y(x) = \left(\frac{3}{2}x^2 - 15x + C_2\right)^{1/3}, \quad C_2 = 3C_1 \in \mathbb{R}.$$

Huomaa, että tämä on ratkaisu vain pisteissä joissa $\frac{3}{2}x^2 - 15x + C \neq 0$, eli määrittelyjoukko riippuu integrointivakion C arvosta.

Edellisessä esimerkissä funktiolla q ei ollut nollakohtia. Tarkastellaan hieman mitä tapahtuu, jos nollakohtia on. Oletetaan, että y_0 on funktion q nollakohta, eli $q(y_0) = 0$. Tällöin vakiofunktio $y(x) = y_0$ on *aina* differentiaaliyhtälön (1.7) ratkaisu, sillä

$$y'(x) = \frac{dy_0}{dx} = 0 = 0 \cdot p(x) = q(y_0) \cdot p(x) = q(y(x))p(x).$$

Tulemme kurssin toisella osalla todistamaan tuloksen, joka sanoo, että jos p ja q ovat riittävän säännöllisiä ja jos kaksi differentiaaliyhtälön (1.7) ratkaisua y_1 ja y_2 leikkaavat jossakin pisteessä x_0 eli $y_1(x_0) = y_2(x_0)$, niin ne yhtyvät jossakin pisteen x_0 ympäristössä. Siispä yleensä on vain kaksi vaihtoehtoa:

i) ratkaisu on vakiofunktio $y(x) = y_0$, missä $q(y_0) = 0$.

ii) funktio $q(y(x)) \neq 0$ kaikilla $x \in I$, missä $I \subseteq \mathbb{R}$ on jokin väli. Tällöin yllä esitetty menetelmä toimii.

Tarkastellaan esimerkeillä tilannetta, jossa q:lla on nollakohta.

Esimerkki 1.8. Tarkastellaan ongelmaa:
Ratkaise yhtälö

$$y' = \frac{y-1}{x+3}$$

sekä hae ne ratkaisut y, joilla $y(-1) = 0$.

Nyt $p(x) = (x+3)^{-1}$ ja $q(y) = y - 1$. Funktio p on määritelty vain kun $x \neq -3$ eli ratkaisuja on kaksi erillistä parvea: toinen välillä $(-\infty, -3)$ ja toinen välillä $(-3, \infty)$. *Triviaaliratkaisut* ovat q:n nollakohdat eli $y(x) \equiv 1$, $x \in \mathbb{R}$. Tämä on määritelty myös kohdassa $x = -3$!

Muut ratkaisut saadaan separoimalla:

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} = \frac{y-1}{x+3} \iff \frac{dy}{y-1} = \frac{dx}{x+3} &\implies \int^y \frac{dy}{y-1} = \int^x \frac{dx}{x+3} \\ &\iff \ln|y-1| = \ln|x+3| + C_0 \iff |y-1| = C_1\,|x+3|\,, \end{aligned}$$

missä $C_1 = e^{C_0}$. Implisiittinen ratkaisu on siis

$$|y-1| = C_1\,|x+3|\,, \quad C_1 \geq 0, \quad x \neq -3$$

Ratkaisujen kuvaajat muodostavat pisteen $(-3, 1) \in \mathbb{R}^2$ kautta kulkevien suorien perheen, joista piste $(-3, 1)$ on poistettu. Tämä *ei siis ole* ristiriidassa sen periaatteen, että eri ratkaisut eivät leikkaa. Leikkauspisteessä yhtälön kertoimet ovat singulaarisia ja ratkaisut eivät ole määritelty.

Tutkitaan alkuehtoa $y(-1) = 0$. Tällöin

$$|y(-1) - 1| = C_1\,|-1+3| \iff 1 = 2C_1 \iff C_1 = \frac{1}{2}$$

Koska nyt piste $x = -1$ kuuluu väliin $(-3, \infty)$, niin $|x+3| = x+3$. Siis ratkaisu, joka toteuttaa alkuehdon $y(-1) = 0$ on

$$|y(x) - 1| = \frac{1}{2}(x+3), \iff y(x) = 1 \pm \frac{1}{2}(x+3), \implies y(x) = 1 - \frac{1}{2}(x+3)$$

kun $x > -3$.

Seuraavan esimerkin tarkoituksena on osoittaa, että separoituvallekin yhtälölle alkuarvo–ongelman yksikäsitteisyys ei välttämättä päde. Kuten tulemme näkemään osassa II, kun muotoilemme yleisen olemassaolo ja –yksikäsitteisyyslauseen, olennaista on kuinka säännöllistä yhtälössä

$$y' = f(x, y)$$

on funktion f riippuvuus muuttujasta y. Hieman yksinkertaistaen pätee seuraava: jos funktio $y \mapsto f(x, y)$ on alkuarvon y_0 ympäristössä derivoituva, niin alkuehtoa $y(x_0) = y_0$ vastaa yksikäsitteinen ratkaisu.

Esimerkki 1.9. Tarkastellaan separoituvaa differentiaaliyhtälöä

$$\frac{dy}{dx} = \sqrt{y} \tag{1.10}$$

joukossa $x \geq 0$, $y \geq 0$. Koska $\sqrt{0} = 0$, niin vakiofunktio $y = 0$ on ratkaisu. Erottamalla muuttujat saadaan

$$\int \frac{dy}{2\sqrt{y}} = \int \frac{1}{2} dx \Longleftrightarrow \sqrt{y} = \frac{1}{2}(x + C).$$

Yleinen ratkaisu on siis

$$y(x) = \frac{1}{4}(x + C)^2, \quad x \geq 0, \tag{1.11}$$

missä $C \geq 0$. Toisaalta todetaan suoraan laskemalla, että jokaisella arvolla $\alpha > 0$, derivoituva funktio

$$y(x) = \begin{cases} 0, & 0 \leq x \leq \alpha, \\ \frac{1}{4}(x - \alpha)^2, & \alpha < x \end{cases} \tag{1.12}$$

toteuttaa differentiaaliyhtälön kaikilla $x \geq 0$. On siis löydetty ääretön määrä ratkaisuja jotka eivät sisälly yleiseen ratkaisuun (1.11). Itse asiassa kaikki ratkaisut (1.12) toteuttavat alkuehdon

$$y(0) = 0. \tag{1.13}$$

Alkuarvotehtävälläkin on siis ääretön määrä ratkaisuja. Tämä patologisuus johtuu kahden erikoistilanteen kombinaatiosta: Funktiolla $q(y) = \sqrt{y}$ on nollakohta pisteessä $y = 0$, missä funktio "käyttäytyy huonosti" ($\lim_{y \to 0+} q'(y) = \infty$). Funktion q häviäminen ei sellaisenaan ole kohtalokasta eikä q:n derivaatan äärettömyys estä muuttujien separoinnin onnistumista. Mutta yhdessä ne aiheuttavat sen, että alkuarvotehtävällä (1.10) & (1.13) ei ole yksikäsitteistä ratkaisua.

1.3 Eksaktit yhtälöt

Olkoot M ja N määrittelyalueessaan $G \subseteq \mathbb{R}^2$ differentioituvia funktioita. Tarkastellaan yhtälöä

$$M(x,y) + N(x,y)y' = 0. \tag{1.14}$$

Asetetaan eksaktin yhtälön määritelmä.

Määritelmä 1.10. Yhtälö (1.14) on *eksakti* alueessa $G \subseteq \mathbb{R}^2$ jos on olemassa sellainen kahdesti differentioituva funktio $F : G \to \mathbb{R}$, että

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x,y) = M(x,y), \quad \frac{\partial F}{\partial y}(x,y) = N(x,y), \quad (x,y) \in G.$$

Mitä hyötyä eksaktisuudesta oikein on? Vastaus selviää tarkastelemalla ketjusääntöä. Oletetaan, että y on differentioituva x:n funktio ja lisäksi

$$F(x, y(x)) \equiv C,$$

jollakin vakiolla C. Tällöin ketjusäännön nojalla

$$0 = \frac{d}{dx}F(x,y(x)) = \frac{\partial F}{\partial x}(x,y(x)) + \frac{\partial F}{\partial y}(x,y(x))\frac{dy}{dx} = M(x,y) + N(x,y)y'.$$

Siis jos pystymme määräämään *integraalifunktion* F ehdoista $\partial F/\partial x = M$, $\partial F/\partial y = N$, niin olemme löytäneet perheen differentiaaliyhtälön (1.14) implisiittisiä ratkaisuja muodossa

$$F(x,y(x)) = C, \quad C \in \mathbb{R}.$$

Eksaktisuus on myös usein helposti varmistettavissa.

Lause 1.11 (Eksaktisuuslause)**.** *Oletetaan, että $M(x,y)$ ja $N(x,y)$ ovat differentioituvia funktioita suorakaiteessa $R \subseteq \mathbb{R}^2$. Jos*

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}, \quad (x,y) \in R, \tag{1.15}$$

niin yhtälö (1.14) *on eksakti R:ssä ja kääntäen.*

Todistus. Eksaktisuuden määritelmästä sekä derivoimisjärjestyksen vaihdon sallivasta säännöstä

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial x}$$

seuraa heti, että ehto (1.15) on voimassa jos yhtälö (1.14) on eksakti R:ssä.

Oletetaan nyt että (1.15) pätee, valitaan mielivaltainen piste $(x_0, y_0) \in R$ ja määritellään

$$F(x,y) = \int_{x_0}^{x} M(\xi, y)\, d\xi + g(y), \tag{1.16}$$

missä g on mielivaltainen derivoituva funktio. Tällöin

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x,y) = M(x,y). \tag{1.17}$$

Vielä on valittava g siten, että eksaktisuuden määritelmän toinenkin ehto

$$\frac{\partial F}{\partial y}(x,y) = N(x,y) \tag{1.18}$$

täyttyy. Derivoidaan (1.16) y:n suhteen ja käytetään oletusta (1.15):

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial y}(x,y) &= \int_{x_0}^{x} \frac{\partial}{\partial y} M(\xi, y)\, d\xi + g'(y) \\ &= \int_{x_0}^{x} \frac{\partial}{\partial \xi} N(\xi, y)\, d\xi + g'(y) \\ &= N(x,y) - N(x_0, y) + g'(y). \end{aligned} \tag{1.19}$$

Ehto funktiolle g on siten

$$g'(y) = N(x_0, y)$$

ja vaatimukset (1.17) & (1.18) täyttäväksi funktioksi kelpaa

$$F(x,y) = \int_{x_0}^{x} \frac{\partial}{\partial y} M(\xi, y)\, d\xi + \int_{y_0}^{y} N(x_0, \eta)\, d\eta.$$

□

Edellisen lauseen todistus sisältää menetelmän eksaktin yhtälön integraalifunktion löytämiseksi:

- valitaan jokin $x_0 \in \mathbb{R}$, joka kuuluu välille, jossa haluamme ratkaista yhtälön
- asetetaan funktioksi g funktion $y \mapsto N(x_0, y)$ jokin integraalifunktio

$$g(y) = \int^{y} N(x_0, \eta)\, d\eta$$

- tällöin funktio
$$F(x,y) = \int_{x_0}^{x} M(\xi, y)\, d\xi + g(y)$$
on eksaktin yhtälön $M(x,y) + N(x,y)y' = 0$ integraalifunktio.

Esimerkki 1.12. Tarkastellaan yhtälöä

$$y'(1 + xe^y + xye^y) + (ye^y + 2) = 0.$$

Tällöin

$$M(x,y) = ye^y + 2,\ N(x,y) = 1 + xe^y + xye^y$$

ja

$$\frac{\partial M}{\partial y} = e^y + ye^y = \frac{\partial N}{\partial x},$$

joten yhtälö on eksakti. Valitaan esim. $x_0 = 0$, jolloin

$$g(y) = \int^{y} N(0,t)dt = \int^{y} 1dt = y + C_1,$$

missä C_1 on vakio. Edelleen koska

$$\int_0^x M(t,y)dt = \int_0^x (ye^y + 2)dt = x(ye^y + 2),$$

niin $F(x,y) = x(ye^y + 2) + y$ on yhtälön integraalifunktio ja siis yhtälön implisiittinen ratkaisu on

$$xye^y + 2x + y = C, \quad C \in \mathbb{R}$$

Huomaa, että funktion y ratkaiseminen on tästä hankalaa, mutta x saadaan helposti ratkaistua

$$x(y) = \frac{C - y}{ye^y + 2}, \quad C, y \in \mathbb{R}$$

eli tiedämme eksplisiittisesti halutun ratkaisun käänteisfunktion.

Voimme myös toimia toisin eksaktin yhtälön integraalifunktion löytämiseksi.

- valitaan jokin $y_0 \in \mathbb{R}$
- asetetaan funktioksi h funktion $x \mapsto M(x, y_0)$ jokin integraalifunktio
$$h(x) = \int^{x} M(x, y_0)dx$$

- tällöin funktio
$$\widetilde{F}(x,y) = h(x) + \int_{y_0}^{y} N(x,s)ds$$
on eksaktin yhtälön $M(x,y) + N(x,y)y' = 0$ integraalifunktio.

Etuna tässä valinnan vapaudessa on se, että vaikka lopullinen funktio on vakiota vailla sama, niin integraalit voivat olla helpompia laskea joskus toisessa ja joskus toisessa tapauksessa.

Esimerkki 1.13. Tarkastellaan yhtälöä $y + xy' = 0$. Joukossa $x \neq 0$ se voidaan kirjoittaa muotoon $y' = -y/x$, joka on separoituva. Yhtälöllä on siis *triviaaliratkaisu* $y(x) \equiv 0$, $x \in \mathbb{R}$, sekä separoimalla saatava ratkaisu, kun $x \neq 0$:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{y}{x} \Longrightarrow \int^{y} \frac{dy}{y} = -\int^{x} \frac{dx}{x} \Longleftrightarrow \ln|y| = -\ln|x| + C_0$$
$$\Longleftrightarrow y = \frac{C}{x}, \quad C = \pm e^{C_0} \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$$

Toisaalta alkuperäinen yhtälö $y + xy' = 0$ on eksakti, sillä nyt $M(x,y) = y$, $N(x,y) = x$ ja funktio $F(x,y) = xy$ toteuttaa ehdot

$$\frac{\partial F}{\partial x} = y = M, \quad \frac{\partial F}{\partial y} = x = N.$$

Siis perhe implisiittisiä ratkaisuja saadaan yhtälöstä

$$F(x,y) = xy = C, \quad C \in \mathbb{R}.$$

Tämä pitää sisällään kaikki edellä saadut ratkaisut. Myös eksaktisuuslauseen ehto (1.15) toteutuu, sillä

$$\frac{\partial M}{\partial y} = 1 = \frac{\partial N}{\partial x}.$$

b) Tarkastellaan seuraavassa hieman hankalampaa yhtälöä:

$$y - 3x^2 + (x-1)y' = 0. \tag{1.20}$$

Tätä yhtälöä ei voida kirjoittaa separoituvassa muodossa, mutta se saadaan kirjoitettua kahden helpomman yhtälön summana

$$y - 3x^2 + (x-1)y' = \big(y + xy'\big) - \big(3x^2 + y'\big) = 0$$

Edellisen esimerkin nojalla lauseke $y + xy'$ on eksakti ja myös $3x^2 + y'$ on eksakti. Tämä nähdään seuraavasti: olkoon $M_1(x, y) = 3x^2$ ja $N(x, y) = 1$. Valitsemalla $F_1(x, y) = x^3 + y$ havaitaan, että

$$\frac{\partial F_1}{\partial x} = 3x^2 = M_1(x, y), \quad \frac{\partial F_1}{\partial y} = 1 = N_1(x, y).$$

Yhdistämällä edellisen esimerkin integraalifunktio $F(x, y) = xy$ ja F_1 nähdään, että funktio $\widetilde{F}(x, y) = xy - x^3 - y$ on yhtälön (1.20) integraalifunktio ja ratkaisuperheenä on siis

$$\widetilde{F}(x, y) = (x - 1)y - x^3 = C \iff y = \frac{x^3 + C}{x - 1}, \quad x \neq 1, C \in \mathbb{R}.$$

Edellisessä esimerkissä yhdistimme kaksi eksaktia yhtälöä ja sovelsimme seuraavaa lausetta.

Lause 1.14. *Oletetaan, että differentiaaliyhtälöt $M_j(x, y) + N_j(x, y)y' = 0$, $j = 1, \ldots, k$, ovat eksakteja. Jos $M = M_1 + \ldots M_k$ ja $N = N_1 + \cdots + N_k$, niin differentiaaliyhtälö $M(x, y) + N(x, y)y' = 0$ on eksakti.*

Todistus. Olkoon $\frac{\partial F_j}{\partial x} = M_j$ ja $\frac{\partial F_j}{\partial y} = N_j$, kun $j = 1, \ldots, k$. Olkoon $F = F_1 + \ldots F_k$. Tällöin

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \sum_{j=1}^{k} \frac{\partial F_j}{\partial x} = \sum_{j=1}^{k} M_j = M$$

ja vastaavasti $\partial F/\partial y = N$. □

Edellisissä esimerkeissä todettiin, että separoituvat malliesimerkit olivat myös eksakteja. Tämä ei ole sattumaa:

Esimerkki 1.15 (Separoituvat DY:t ovat eksakteja)**.**
Olkoon

$$y' = p(x)q(y)$$

separoituva DY ja tarkastellaan yhtälöä pisteen (x_0, y_0) ympäristössä olettaen ettei $y(x) = y_0$ ole triviaaliratkaisu. Valitsemalla tämä ympäristö riittävän pieneksi voimme olettaa $q(y) \neq 0$ ja asetamme

$M(x, y) = p(x)$ ja $N(x, y) = -q(y)^{-1}$. Tällöin

$$y' = p(x)q(y) \iff p(x) - \frac{y'}{q(y)} = 0 \iff M(x, y) + N(x, y)y' = 0.$$

Koska M ei riipu y:stä ja N ei riipu x:stä, niin

$$\frac{\partial M}{\partial y} = 0 = \frac{\partial N}{\partial x},$$

joten eksaktisuuslauseen nojalla yhtälö on eksakti.

Esimerkki 1.16. Joskus ei-eksakti yhtälö voidaan muuntaa yksinkertaisella tempulla lähes ekvivalentiksi eksaktiksi yhtälöksi. Katsotaan seuraavaa esimerkkiä:

$$(x + 3x^3 \sin y) + (x^4 \cos y)y' = 0$$

Nyt $M(x, y) = x + 3x^3 \sin y$ ja $N(x, y) = x^4 \cos y$, joten

$$\frac{\partial M}{\partial y} = 3x^3 \cos y \neq 4x^3 \cos y = \frac{\partial N}{\partial x},$$

joten eksaktisuusehto ei toteudu. Kerrotaan yhtälö puolittain x^{-1}:llä, jolloin ainakin osaväleillä $(-\infty, 0)$ ja $(0, \infty)$ yhtälöt ovat ekvivalentit. Tällöin saadaan

$$(1 + 3x^2 \sin y) + (x^3 \cos y)y' = 0,$$

jolloin $M'(x, y) = 1 + 3x^2 \sin y$ ja $N'(x, y) = x^3 \cos y$. Nyt

$$\frac{\partial M'}{\partial y}(x, y) = 3x^2 \cos y = \frac{\partial N'}{\partial x}(x, y),$$

eli saatu yhtälö on eksaktisuuslauseen nojalla eksakti.

Kertojafunktiota $\mu(x) = x^{-1}$ sanotaan yhtälön *integroivaksi tekijäksi*. Yleisessä tilanteessa integroiva tekijän etsiminen mudossa $\mu(x, y)$ johtaa *osittaisdifferentiaaliyhtälöön* funktiolle μ, eli yhtälöön jossa esiintyy sekä x:n että y:n suhteen otettuja osittaisderivaattoja. Tämä ei yleensä ole helpompi ongelma kuin alkuperäinen differentiaaliyhtälö. Joissain tilanteissa integroiva tekijä voidaan löytää muodossa joka riippu vain x:stä. Seuraava lause on antaa tälle riittävän ehdon.

Lause 1.17. *Jos*

$$f(x) = \frac{1}{N(x, y)} \left(\frac{\partial}{\partial y} M(x, y) - \frac{\partial}{\partial x} N(x, y) \right) \tag{1.21}$$

on y:n suhteen vakiofunktio, niin yhtälöllä

$$M(x, y) + N(x, y)y' = 0$$

on muotoa $\mu(x) = e^{\int_{x_0}^{x} f(\xi)\, d\xi}$ oleva integroiva tekijä[1].

[1] Huomaa, että tämä integroiva tekijä on aina nollasta erovava, joten integroivaa tekijää käyttäen saatu yhtälö on tässä tapauksessa yhtäpitävä alkuperäisen yhtälön kanssa.

Todistus. Olkoon $\mu(x)$ mielivaltainen derivoituva funktio. Tällöin

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial y}(\mu(x)M(x,y)) - \frac{\partial}{\partial x}(\mu(x)N(x,y)) = \\
&\mu(x)\frac{\partial}{\partial y}M(x,y) - \mu'(x)N(x,y) - \mu(x)\,\frac{\partial}{\partial x}N(x,y) \\
&\mu(x)\left(\frac{\partial}{\partial y}M(x,y) - \frac{\partial}{\partial x}N(x,y)\right) - \mu'(x) = \\
&\mu(x)f(x)N(x,y) - \mu'(x)N(x,y) = \\
&\left(\mu(x)f(x) - \mu'(x)\right)N(x,y)
\end{aligned}$$

$\mu(x)$ on siis integroiva tekijä jos

$$\mu(x)f(x) - \mu'(x) = 0.$$

Tämä on separoituva differentiaaliyhtälö, jonka eräs ratkaisu on

$$\mu(x) = e^{\int_{x_0}^{x} f(\xi)\,d\xi}.$$

□

1.4 Ensimmäisen kertaluvun lineaariset yhtälöt

Toistaiseksi olemme tarkastelleet hyvin yleistä muotoa olevia ensimmäisen kertaluvun yhtälöitä. Tässä kappaleessa tutkimme *lineaarista* ensimmäisen kertaluvun differentiaaliyhtälöä

$$(Ly)(x) := y'(x) + p(x)y(x) = q(x) \tag{1.22}$$

ja sitä vastaaavaa *homogeeniyhtälöä*

$$(Ly)(x) := y'(x) + p(x)y(x) = 0 \tag{1.23}$$

jollakin välillä $I \subseteq \mathbb{R}$.

Nimitys lineaarinen tulee siitä, että kaavan (1.22) määräämä funktio $y \mapsto L(y)$ on lineaarinen[2], toisin sanoen mielivaltaisilla derivoituvilla funktioilla y, y_1 ja y_2 sekä vakioilla $a \in \mathbb{R}$ pätee

$$\begin{aligned}
L(y_1 + y_2) &= Ly_1 + Ly_2, &\quad (1.24)\\
L(ay) &= aLy &\quad (1.25)
\end{aligned}$$

[2]Huomaa, että tämä on kuvaus, joka kuvaa differentioituvan funktion y jatkuvalle funktiolle; usein tälläisista ”funktioarvoisista kuvauksista”käytetään matematiikassa termiä *operaattori*.

Tämä seuraa helposti derivoimistoimituksen lineaarisuudesta:

$$\frac{d(y_1 + y_2)}{dx} = \frac{dy_1}{dx} + \frac{dy_2}{dx}, \quad \frac{d(ay)}{dx} = a\frac{dy}{dx}.$$

Käyttäen operaattoria L voimme kirjoittaa yhtälöt (1.22) ja (1.23) muotoon

$$Ly = b \tag{1.26}$$

ja

$$Ly = 0. \tag{1.27}$$

Tällä abstrahoinnilla on se etu, että voimme käyttää lineaarialgebran menetelmiä ja tuloksia aivan kuten algebrallisten yhtälöryhmien

$$\begin{cases} a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + \cdots + a_{1n}y_n &= b_1 \\ a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + \cdots + a_{2n}y_n &= b_2 \\ \vdots &= \vdots \\ a_{n1}y_1 + a_{n2}y_2 + \cdots + a_{nn}y_n &= b_n \end{cases} \tag{1.28}$$

tutkimuksessa. Onhan yhtälö (1.28) muotoa (1.26) kunhan määritellään

$$L = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{2n} & & a_{nn} \end{pmatrix}, \quad y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}. \tag{1.29}$$

Tulemme vähän myöhemmin (lauseet 1.20 –1.21) käyttämään L:n lineaarisuutta tutkiessamme yhtälön (1.22) ratkaisujoukon rakennetta. Katsotaan kuitenkin ennen sitä pystymmekö ratkaisemaan yhtälön jo opittujen menetelmien avulla.

Osaamme ainakin ratkaista eksakteja yhtälöitä. Kokeillaankin milloin yhtälö (1.22) on eksakti. Nyt $M(x, y) = p(x)y - q(x)$ ja $N(x, y) = 1$. Jos yhtälö on eksakti, niin eksaktisuuslauseen ehdon nojalla

$$\frac{\partial M}{\partial y} = p(x) \equiv \frac{\partial N}{\partial x} = 0.$$

Siis yhtälö (1.22) on eksakti silloin ja vain silloin kun $p \equiv 0$, jolloin yhtälö on muotoa $y'(x) = q(x)$, joka on aina integroitavissa. Toisaalta

$$\frac{1}{N(x, y)} \left(\frac{\partial}{\partial y} M(x, y) - \frac{\partial}{\partial x} N(x, y) \right) = p(x),$$

joten lauseen 1.21 nojalla yhtälöllä (1.22) on muotoa

$$\mu(x) = e^{\int_{x_0}^{x} p(\xi)d\xi}$$

oleva integroiva tekijä, joka ei koskaan saa arvoa nolla. Jokainen lineaarinen ensimmäisen kertaluvun lineaariyhtälö voidaan siis palauttaa eksaktiksi.

Harjoituksen vuoksi johdamme nyt integroivan tekijän lausekeen käyttämättä lauseen 1.21 tulosta. Olkoon $\mu(x)$ jokin x:n funktio (mutta ei y:n) ja kerrotaan yhtälö (1.22) puolittain μ:llä. Tällöin saadaan

$$\begin{aligned} &\tilde{M}(x,y) + \tilde{N}(x,y)y' = 0, \\ &\begin{cases} \tilde{M}(x,y) = p(x)\mu(x)y - q(x)\mu(x) \\ \tilde{N}(x,y) = \mu(x). \end{cases} \end{aligned} \tag{1.30}$$

Katsotaan, nyt millaisella μ:n valinnalla uusi yhtälö (1.30) on eksakti. Eksaktisuuslauseen ehdosta saadaan

$$\begin{cases} \partial\tilde{M}(x,y)/\partial y = p(x)\mu(x) \\ \partial\tilde{N}(x,y)/\partial x = \mu'(x) \end{cases} \implies \mu'(x) = p(x)\mu(x).$$

Tämä on separoituva yhtälö, ja sillä on yhtenä ratkaisuna

$$\mu(x) = e^{\int_{x_0}^{x} p(\xi)d\xi}. \tag{1.31}$$

Huomaa, että tarvisemme vain jonkin ei–triviaalin ratkaisun. Koska yhtälö on lineaarinen sujuu jatkokin paljon helpommin: Yhtälö (1.30) antaa

$$\begin{aligned} &\mu(x)y'(x) + p(x)\mu(x)y(x) = \mu(x)q(x) \\ \iff &\mu(x)y'(x) + \mu'(x)y(x) = \mu(x)q(x) \\ \iff &\frac{d}{dx}(\mu(x)y(x)) = \mu(x)q(x) \\ \iff &y(x) = \frac{1}{\mu(x)}\left(\int_{x_0}^{x} \mu(\xi)q(\xi)d\xi + C\right). \end{aligned}$$

Kun vielä otetaan (1.31) huomioon, saadaan:

$$y(x) = Ce^{-\int_{x_0}^{x} p(\xi)d\xi} + \int_{x_0}^{x} e^{-\int_{z}^{x} p(\xi)d\xi} q(z)dz. \tag{1.32}$$

On siis osoitettu:

Lause 1.18. *Ensimmäisen kertaluvun lineaarisen differentiaaliyhtälön* (1.22) *yleinen ratkaisu saadaan kaavasta* (1.32).

Alkuehdon

$$y(x_0) = y_0 \tag{1.33}$$

toteuttava yksiyisratkaisu saadaan sijoittamalla (1.33) yhtälöön (1.32) ja ratkaisemalla C. Selvästi tulos on $C = y_0$. Näin on tullut todistettua:

Seurauslause 1.19. *Alkuarvotehtävän*

$$y'(x) + p(x)y(x) = q(x),\ y(x_0) = x_0,$$

ratkaisu on

$$y(x) = y_0\, e^{-\int_{x_0}^{x} p(\xi)d\xi} + \int_{x_0}^{x} e^{-\int_{z}^{x} p(\xi)d\xi} q(z)dz. \tag{1.34}$$

Tutkitaan hieman tarkemmin täydellisen yhtälön (1.22) yleistä ratkaisua (1.32). Tämä on kahden termin summa, joista ensimmäinen

$$Ce^{-\int_{x_0}^{x} p(\xi)d\xi} \tag{1.35}$$

on vastaavan homogeeniyhtälön (1.23) yleinen ratkaisu. Jälkimmäinen termi

$$\int_{x_0}^{x} e^{-\int_{z}^{x} p(\xi)d\xi} q(z)dz$$

toteuttaa täydellisen yhtälön, sillä

$$\frac{d}{dx}\int_{x_0}^{x} e^{-\int_{z}^{x} p(\xi)d\xi} q(z)dz = q(x) - p(x)\int_{x_0}^{x} e^{-\int_{z}^{x} p(\xi)d\xi} q(z)dz.$$

Tämä ei ole mikään sattuma. Osoitamme seuraavaksi, että täydellisen yhtälön *kaikki* ratkaisut saadaan lisäämällä vastaavaan homogeeniyhtäkön yleiseen ratkaisuun täydellisen yhtälön eräs yksityisratkaisu. Aloitamme seuraavalla tärkeällä lauseella, jota usein kutsutaan *superpositioperiaatteeksi.* Se sanoo, että lineaarisen homogeeniyhtälön ratkaisujen lineaarikombinaatio on myös homogeeniyhtälön ratkaisu. Lineaarialgebraan perehtynyt lukija huomaa, että tämä on vain erikoistapaus yleisestä tuloksesta, jonka mukaan lineaarikuvauksen ydin, eli nolla–avaruus, on lähtöavaruuden lineaarinen aliavaruus.

Lause 1.20. *Olkoot y_1 ja y_2 kaksi homogeeniyhtälön* (1.23) *ratkaisua ja olkoot a_1 ja a_2 reaalilukuja. Tällöin myös lineaarikombinaatio $a_1y_1 + a_2y_2$ on yhtälön* (1.23) *ratkaisu.*

Todistus. Määritellään lineaarinen operaattori L kuten yhtälössä (1.23):

$$(Ly)(x) := y'(x) + p(x)y(x).$$

Koska y_1 ja y_2 toteuttavat yhtälön(1.23), niin

$$Ly_1 = 0 \quad \text{ja} \quad Ly_2 = 0,$$

mistä L:n lineaarisuuden nojalla seuraa, että

$$L\left(a_1 y_1 + a_2 y_2\right) = a_1 L y_1 + a_2 L y_2 = 0,$$

toisin sanoen, $a_1 y_1 + a_2 y_2$ on yhtälön (1.23) ratkaisu. □

Lause 1.21. *Olkoon Cy_0 homogeeniyhtälön* (1.23) *yleinen ratkaisu*[3] *ja olkoon y_1 täydellisen yhtälön* (1.22) *jokin yksityisratkaisu. Tällöin*

$$y(x) = Cy_0(x) + y_1(x) \tag{1.36}$$

on täydellisen yhtälön yleinen ratkaisu. Täydellisen yhtälön kaikki ratkaisut ovat muotoa (1.36).

Todistus. Oletuksen mukaan

$$Ly_0 = 0 \quad \text{ja} \quad Ly_1 = q.$$

Operaattorin L lineaarisuuden perusteella

$$L\left(Cy_0 + y_1\right) = CLy_0 + Ly_1 = 0 + q = q,$$

joten $Cy_0 + y_1$ on täydellisen yhtälön ratkaisu.

Vielä on osoitettava, että täydellisen yhtälön (1.22) *kaikki* ratkaisut ovat muotoa (1.36). Olkoon y_2 jokin täydellisen yhtälön ratkaisu, eli $L(y_2) = q$. Tällöin lineaarisuuden nojalla

$$L(y_2 - y_1) = L(y_2) - L(y_1) = q - q = 0,$$

eli erotus $y_1 - y_2$ on homogeeniyhtälön ratkaisu, ja siis jollain vakion C arvolla pätee

$$y_2 - y_1 = Cy_0,$$

eli $y_2 = Cy_0 + y_1$, joka oli väitteemme. □

[3] Vakio C on siis integrointivakio.

Lause 1.21 antaa menetelmän lineaarisen ensimmäisen kertaluvun yhtälön ratkaisemiseksi: Ensin ratkaistaan vastaava homogeeniyhtälö separoimalla muuttujat, minkä jälkeen etsitään täydellisen yhtälön jokin yksityistratkaisu, joka sitten lisätään homogeeniyhtälön yleiseen ratkaisuun. Usein yksityisratkaisu löydetään helposti vaikkapa kokeilemalla, kuten seuraavassa esimerkissä.

Esimerkki 1.22. On ratkaistava yhtälö

$$y' + 2y = 3e^x. \tag{1.37}$$

Vastaava homogeeniyhtälö on

$$\frac{dy}{dx} + 2y = 0.$$

Tämä ratkaistaan muuttujat erottamalla:

$$\int \frac{dy}{y} = -2 \int dx \Longleftrightarrow \ln|y| = -2x + \ln C_1 \Longleftrightarrow y = Ce^{-2x}.$$

Vielä on löydettävä täydellisen yhtälön jokin yksityisratkaisu. Koska eksponentiaalifunktio on itsensä derivaatta on ilmeistä, että täydellisellä yhtälöllä on muotoa

$$y(x) = Ae^x \tag{1.38}$$

oleva ratkaisu. Kun sijoitetaan (1.38) yhtälöön (1.37), niin saadan

$$Ae^x + 2Ae^x = 3e^x,$$

mikä pätee identtisesti jos ja vain jos $A = 1$. Yksiyisratkaisu on siis $y(x) = e^x$ ja täydellisen yhtälön yleinen ratkaisu on

$$y(x) = Ce^{-2x} + e^x.$$

Toisinaan täydellisen yhtälön yksiyisratkaisu ei ole heti arvattavissa. Tällöin ratkaisu saadaan aina kaavasta (1.32) tai alkuarvotehtävän tapauksessa kaavasta (1.34). Näitä kaavoja ei kuitenkaan tarvitse muistaa ulkoa, sillä ne voidaan aina johtaa yleisellä menettelyllä, jota kutsutaan *vakion varioimiseksi*. Korvataan homogeeniyhtälön yleisesssä ratkaisussa (1.35) esiintyvä vakio C tuntemattomalla funktiolla $C(x)$ ja kokeillaan toteuttaako

$$y(x) = C(x)e^{-\int_{x_0}^{x} p(\xi)d\xi} \tag{1.39}$$

täydellisen yhtälön. Derivoidaan (1.39),

$$y'(x) = C'(x)e^{-\int_{x_0}^{x} p(\xi)d\xi} + C(x)(-p(x))e^{-\int_{x_0}^{x} p(\xi)d\xi}, \tag{1.40}$$

ja sijoitetaan (1.39) ja (1.40) täydelliseen yhtälöön:

$$C'(x)e^{-\int_{x_0}^{x} p(\xi)d\xi} + C(x)(-p(x))e^{-\int_{x_0}^{x} p(\xi)d\xi} + p(x)C(x)e^{-\int_{x_0}^{x} p(\xi)d\xi} = q(x).$$

Funktion $C(x)$:n täytettäväksi jää ehto

$$C'(x)e^{-\int_{x_0}^{x} p(\xi)d\xi} = q(x),$$

eli

$$C'(x) = e^{\int_{x_0}^{x} p(\xi)d\xi} q(x)$$

josta integroimalla saadaan

$$C(x) = C + \int_{x_0}^{x} e^{\int_{x_0}^{z} p(\xi)d\xi} q(z)dz.$$

Täydellisen yhtälön yleinen ratkaisu on siis

$$y(x) = e^{-\int_{x_0}^{x} p(\xi)d\xi} \left(C + \int_{x_0}^{x} e^{\int_{x_0}^{z} p(\xi)d\xi} q(z)dz \right)$$

lauseen 1.18 mukaisesti.

Esimerkki 1.23. Tarkastellaan yhtälöä

$$\frac{1}{x}\frac{dy}{dx} - \frac{2y}{x^2} = x\cos x, \quad \text{alkuehdolla } y(\frac{\pi}{2}) = 3.$$

Koska tämä yhtälö ei ole standardimuodossa, niin kerrotaan x:llä:

$$\frac{dy}{dx} - \frac{2y}{x} = x^2\cos x. \tag{1.41}$$

Huomaa että yhtälön kertoimet ovat singulaariset origossa, joten se että kerromme x:llä, ei vaikuta ratkaisujoukkoon. Vastaava homogeeniyhtälö

$$\frac{dy}{dx} - \frac{2y}{x} = 0$$

ratkaistaan muuttujat erottamalla:

$$\int \frac{dy}{y} = 2\int \frac{dx}{x} \Longleftrightarrow \ln|y| = \ln x^2 + C_1 \Longleftrightarrow y(x) = Cx^2.$$

Käytetään nyt vakion variointia ja sijoitetaan yrite

$$\begin{aligned} y(x) &= C(x)x^2, \\ y'(x) &= C'(x)x^2 + 2C(x)x, \end{aligned}$$

täydelliseen yhtälöön (1.41):

$$\begin{aligned} C'(x)x^2 + 2C(x)x - 2C(x)x &= x^2 \cos x \iff \\ C'(x) &= \cos x \iff \\ C(x) = C + \sin x & \end{aligned}$$

Täydellisen yhtälön yleinen ratkaisu on siis

$$y(x) = x^2(C + \sin x)$$

Alkuehdon toteuttava ratkaisu saadaan, kun

$$3 = y(\frac{\pi}{2}) = (\frac{\pi}{2})^2(\sin\frac{\pi}{2} + C) = \frac{\pi^2}{4}(C+1) \iff C = \frac{12}{\pi^2} - 1,$$

joten haettu alkuarvotehtävän ratkaisu on

$$y(x) = x^2(\sin x + \frac{12}{\pi^2} + 1).$$

1.5 Sijoitukset ja muunnokset

Kaikki yhtälöt eivät ole separoituvia, lineaarisia tai eksakteja. Erilaisilla muunnoksilla osa yhtälöistä voidaan kuitenkin muuntaa sellaisiksi. Seuraavassa tarkastellaan neljää klassista esimerkkiä.

1.5.1 Tasa-asteiset yhtälöt

Muotoa

$$y' = f\left(\frac{y}{x}\right)$$

oleva yhtälö on *tasa-asteinen*. Usein tasa-asteista yhtälöä kutsutaan homogeeniseksi, mutta koska tätä nimeä on jo käytetty toisessa merkityksessä lineaaristen yhtälöiden yhteydessä, niin emme käytä sitä tässä monisteessa.

Tasa-asteinen yhtälö palautuu separoituvaksi sijoituksella

$$v(x) := \frac{y(x)}{x}, \quad x \neq 0,$$

ja katsomalla, millaisen yhtälön v toteuttaa: nyt

$$y(x) = xv(x) \Longrightarrow y'(x) = v(x) + xv'(x)$$

joten

$$v(x) + xv'(x) = y'(x) = f(\frac{y(x)}{x}) = f(v(x)) \Longrightarrow v' = \frac{f(v) - v}{x},$$

mikä on separoituva.

Esimerkki 1.24. Yhtälö

$$y' = \frac{xy + y^2 + x^2}{x^2} = \frac{y}{x} + \frac{y^2}{x^2} + 1 = f\left(\frac{y}{x}\right),$$

kun $f(t) = t^2 + t + 1$ on ei-separoituva, epälineaarinen ja ei-eksakti, mutta tasa-asteinen yhtälö. Tehdään edellä esitetty sijoitus ja ratkaistaan saatu separoituva yhtälö:

$$\begin{aligned} v = \frac{y}{x} &\Longrightarrow v' = \frac{f(v) - v}{x} = \frac{v^2 + v + 1 - v}{x} = \frac{v^2 + 1}{x} \Longleftrightarrow \frac{v'}{v^2 + 1} = \frac{1}{x} \\ &\Longrightarrow \int^v \frac{dv}{v^2 + 1} = \int^x \frac{dx}{x} \Longleftrightarrow \arctan v = \ln|x| + C \\ &\Longrightarrow v = \tan(\ln|x| + C) \Longrightarrow y = xv = x\tan(\ln|x| + C) \end{aligned}$$

1.5.2 Muotoa $y' = G(ax + by)$ olevat yhtälöt

Yhtälöt, joka ovat muotoa $y' = G(ax + by)$, a, b vakioita ja $b \neq 0$, voidaan palauttaa separoituvaksi sijoituksella $w = ax + by$. Tällöin nimittäin

$$\begin{aligned} w = ax + by \Longrightarrow w' = a + by' &\Longleftrightarrow \frac{w' - a}{b} = y' = G(ax + by) = G(w) \\ &\Longleftrightarrow w' = bG(w) + a, \end{aligned}$$

joka on separoituva differentiaaliyhtälö.

Esimerkki 1.25. Yhtälö

$$y' = y - x - 1 + \frac{1}{x - y + 2} = G(y - x), \quad G(t) = t - 1 + \frac{1}{-t + 2},$$

Sijoituksella $w = y - x$ (nyt siis $a = -1, b = 1$) saadaan separoituva yhtälö

$$w' = w - 1 + \frac{1}{2 - w} - 1 = \frac{-(w - 2)^2 + 1}{2 - w} = \frac{(w - 2)^2 - 1}{w - 2}.$$

Ratkaistaan tämä:

$$
\begin{aligned}
w' = \frac{(w-2)^2-1}{w-2} &\Longrightarrow \int^w \frac{w-2}{(w-2)^2-1}dw = \int^x dx = x + C \\
&\Longleftrightarrow \frac{1}{2}\ln\left|(w-2)^2-1\right| = x + C \Longleftrightarrow \left|(w-2)^2-1\right| = C_1 e^{2x} \\
&\Longleftrightarrow (w-2)^2 = C_2 e^{2x} + 1 \Longleftrightarrow (y-x-2)^2 = C_2 e^{2x} + 1,
\end{aligned}
$$

mikä on alkuperäisen differentiaaliyhtälön implisiittinen ratkaisu.

1.5.3 Tasa-asteiseen palautuva yhtälö

Tarkastellaan yhtälöä

$$
\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{a_1x + b_1y + c_1}{a_2x + b_2y + c_2}\right). \tag{1.42}
$$

Jos $c_1 = c_2 = 0$, niin yhtälö on

$$
\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{a_1x + b_1y}{a_2x + b_2y}\right) = f\left(\frac{a_1 + b_1y/x}{a_2 + b_2y/x}\right),
$$

toisin sanoen, tasa-asteinen. On ilmeistä, että lineaarisella muuttujien vaihdoksella päästään tilanteeseen, missä sekä osoittajan että ninittäjän vakiotermi $= 0$. Kokeillaan siis

$$
\begin{cases} x &= u + \xi, \\ y &= v + \eta. \end{cases}
$$

Nyt yhtälö (1.42) saa muodon

$$
\frac{dv}{du} = f\left(\frac{a_1(u+\xi) + b_1(v+\eta) + c_1}{a_2(u+\xi) + b_2(v+\eta) + c_2}\right) = f\left(\frac{a_1u + b_1v + (a_1\xi + b_1\eta + c_1)}{a_2u + b_2v + (a_2\xi + b_2\eta + c_2)}\right),
$$

joka on edellisen kommentin perusteella tasa-asteinen mikäli vakiotermit osoittajassa ja nimittäjässä häviävät, eli jos (ξ, η) on lineaarisen algebrallisen yhtälöryhmän

$$
\begin{cases} a_1\xi + b_1\eta + c_1 &= 0, \\ a_2\xi + b_2\eta + c_2 &= 0 \end{cases} \tag{1.43}
$$

ratkaisu. Ehdon (1.43) geometrinen tulkinta on, että siirretään origo suorien $a_1x + b_1y + c_1 = 0$ ja $a_2x + b_2y + c_2 = 0$ leikkauspisteeseen. Jos nämä suorat eivät leikkaa, mikä tapahtuu jos ja vain jos $a_1b_2 - a_2b_1 = 0$, niin alkuperäinen yhtälö (1.42) on joko separoituva tai separoituvaan palutuva, kuten on helppo osoittaa.

Esimerkki 1.26. Tarkastellaan yhtälöä

$$y' = \frac{y - x + 1}{x + y}.$$

Tämä on muotoa (1.42) kun $f(\lambda) = -\lambda$ ja $a_1 = -b_1 = a_2 = b_2 = c_1 = 1$ ja $c_2 = 0$. Yhtälöryhmällä (1.43) on ratkaisu $\xi = -\eta = 1/2$, joten merkitsemällä

$$x = u - 1/2,\ y = v + 1/2,$$

saamme funktiolle $v(u)$ differentiaaliyhtälön

$$\frac{dv}{du} = -\frac{u - v}{u + v} = -\frac{1 - v/u}{1 + v/u}.$$

Tehdään sijoitus $w(u) = v(u)/u$, jolloin funktiolle w saadaan yhtälö

$$uw' = \frac{1 + w^2}{1 + w},$$

joka on separoituva ja jolla on yleinen implisiittinen ratkaisu

$$\sqrt{1 + w^2}\, e^{\arctan(w)} = Cu,\ C \in \mathbb{R}.$$

Sijoittamalla takaisin $w = v/u$ saadaan

$$\sqrt{1 + (v/u)^2}\, e^{\arctan(v/u)} = Cu,\ C \in \mathbb{R}.$$

ja lopulta sijoittamalla $u = x + 1/2$ ja $v = y - 1/2$ saamme alkuperäisen yhtälön implisiittiseksi ratkaisuksi

$$\sqrt{1 + \left((\frac{y - 1/2}{x + 1/2}\right)^2} \exp\{\arctan\left(\frac{y - 1/2}{x + 1/2}\right)\} = C(x + 1/2),\ C \in \mathbb{R}.$$

1.5.4 Bernoulli–yhtälö

Bernoulli–yhtälö on muotoa

$$y'(x) + p(x)y(x) = q(x)y(x)^{\lambda}, \tag{1.44}$$

missä λ on reaalinen parametri. Kun $\lambda = 0, 1$, niin yhtälö on lineaarinen, joten oletetaan, että $\lambda \neq 0, 1$. Huomataan, että $y \equiv 0$ on yhtälön triviaali ratkaisu, jos $\lambda > 0$. Jakamalla puolittain y^{λ}:lla (menetämme tässe ne ratkaisut, joilla $y = 0$ jossakin) saamme

$$y^{-\lambda}y' + p(x)y^{1-\lambda} = q(x). \tag{1.45}$$

Koska

$$\frac{d}{dy}y^{1-\lambda} = (1-\lambda)y^{-\lambda},$$

niin huomaamme, että muunnos

$$\begin{cases} v &= y^{1-\lambda}, \\ v' &= (1-\lambda)y^{-\lambda}y' \end{cases}$$

on käyttökelpoinen, muuntaahan se yhtälön (1.45) lineaariseen muotoon

$$\frac{1}{1-\lambda}v' + p(x)v = q(x).$$

Esimerkki 1.27. Tarkastellaan yhtälöä $y' - 5y = -\frac{5}{2}xy^3$, eli $P(x) \equiv -5$, $Q(x) = -\frac{5}{2}x$, $\lambda = 3$. Siis sijoitetaan $v = y^{1-3} = y^{-2}$ ja saadaan yhtälö

$$-\frac{1}{2}v' - 5v = -\frac{5}{2}x \iff v' + 10v = 5x \iff e^{-10x}\frac{d}{dx}(ve^{10x}) = 5x$$
$$\iff \frac{d}{dx}(ve^{10x}) = 5xe^{10x}$$

Osittaisintegroimalla saadaan

$$\int^x 5xe^{10x}dx = \frac{1}{2}xe^{10x} - \frac{1}{2}\int^x e^{10x}dx = \frac{1}{2}xe^{10x} - \frac{1}{20}e^{10x} + C,$$

joten

$$v(x) = (y(x))^{-2} = \frac{x}{2} - \frac{1}{20} + Ce^{-10x}, \quad C \in \mathbb{R}$$

Ylläoleva skaalaus on erikoistapaus seuraavasta Bernoulli–yhtälöiden yleisestä ominaisuudesta: oletetaan että $y > 0$ toteuttaa yhtälön (1.44) ja merkitään $w = y^\alpha$, missä $\alpha \in \mathbb{R}$. Tällöin $y = w^{1/\alpha}$ ja

$$y' = \frac{1}{\alpha}w'w^{(1-\alpha)/\alpha},$$

joten sijoittamalla nämä yhtälöön (1.44) saamme w:lle yhtälön

$$w' + \alpha p(x)w = \alpha q(x)w^{(\lambda+\alpha-1)/\alpha},$$

joka on jälleen Bernoulli–yhtälö, mutta nyt parametrilla $(\lambda + \alpha - 1)/\alpha$.

Luku 2

Esimerkkejä sovelluksista

2.1 Sekoitusmallit

Tyypillinen esimerkki on seuraava: Tarkastellaan suurta vesitankkia, jossa on 1000 litraa puhdasta vettä. Oletamme seuraavaa:

- sisään virtaa nestettä (suolavettä) nopeudella 6 l/min,
- ulos virtaa nestettä nopeudella 6 l/min,
- hetkellä $t = 0$ tankissa oleva neste on hyvin sekoitettu eli konsentraatio on joka paikassa vakio. Lisäksi konsentraatio hetkellä $t = 0$ on x_0 kg/l
- neste pidetään koko ajan hyvin sekoitettuna
- oletetaan, että sisäänvirtaavan nesteen konsentraatio on x_1 kg/l

Haluemme tietää, *mikä on konsentraatio hetkellä t*? Olkoon tämä konsentraatio $x(t)$. Nyt käytämme seuraavaa mallia. Olkoon $s(t)$ suolan määrä tankissa hetkellä (yksikkönä kg). Suolamäärän hetkellinen muutos on

$$ds(t) = \big(\{\text{sisääntulevan suolan määrä}\} - \{\text{ulosvirtaavan suolan määrä}\}\big)dt.$$

Koska sisään tulee nestettä 6 l/min ja sen konsentraatio on x_1 kg/l, niin sisään tulee suolaa 6 l/min $\times x_1$ kg/l $= 6x_1$ kg/min. Vastaavasti ulos virtaa suolaa hetkellä $6x(t)$ kg/min hetkellä t. Koska $s(t) = x(t) \times V$, missä $V = 1000$ l, saamme differentiaaliyhtälön

$$x'(t) = \frac{3}{500}(x_1 - x(t))$$

alkuehdolla $x(0) = x_0$. Tämä on vakiokertoiminen lineaarinen yhtälö, joten sen ratkaisu voidaan tehdä esim. seuraavalla tavalla

$$
\begin{aligned}
&x'(t) + \frac{3}{500}x(t) = \frac{3x_1}{500} \\
&\iff e^{3t/500}x'(t) + \frac{3}{500}e^{(3/500)t}x(t) = \frac{d}{dt}(e^{3t/500}x(t)) = \frac{3x_1}{500}e^{3t/500} \\
&\iff e^{3t/500}x(t) = x_1e^{3t/500} + C \iff x(t) = x_1 + Ce^{-3t/500}.
\end{aligned}
$$

Alkuehdosta saadaan

$$x_0 = x(0) = x_1 + C \iff C = x_0 - x_1$$

joten konsentraatio hetkellä t on

$$x(t) = x_1 + (x_0 - x_1)e^{-3t/500}.$$

Intuitiivisesti tämä on uskottava ratkaisu: kun $x_1 < x_0$, niin konsentraatio vähenee kohti x_1:tä ja kun $x_1 > x_0$, niin konsentraatio kasvaa kohti x_1:tä.

Esimerkki 2.1. Olkoon $x_0 = 0$ ja $x_1 = 1$ (yksikkönä kg/l). Milloin tankissa olevan nesteen konsentraatio on $= 1/2$?
Ratkaisu: Nyt

$$
\begin{aligned}
x(t) = 1 - e^{-3t/500} = 1/2 &\iff e^{-3t/500} = 1/2 \\
\iff t = -\frac{500}{3}\ln(1/2) &= \frac{500}{3}\ln 2 \approx 115,5 \text{ min}
\end{aligned}
$$

2.2 Populaatiomallit

2.2.1 Malthuksen populaatiomalli eli eksponentiaalinen kasvumalli

Yksinkertainen tilanne on seuraava: tarkastellaan jonkin yksinkertaisen populaation (esim. bakteerien) lisääntymistä. Oletamme, että lisääntyminen tapahtuu siten, että kannan kasvun nopeus on suoraan verrannollinen populaation kokoon N eli

$$\frac{dN(t)}{dt} = rN(t), \quad t > 0, \tag{2.1}$$

missä r on reaalinen vakio (niin kutsuttu *Malthuksen parametri*). Jos populaation alkukoko N_0 tunnetaan, niin yhtälöön (2.1) voidaan liittää aalkuehto

$$N(0) = N_0, \tag{2.2}$$

Intuitiivisesti on selvää, että oikeasti ympäristötekijät, esimerkiksi käytössä oleva ravinto, vaikuttavat kertoimen r arvoon. Näinollen oletus, että r on vakio rajoitaa voimakkaasti mallin käyttökelpoisuutta. Lyhyellä aikavälillä malli saattaa kuitenkin kuvata populaation kasvua järkevästi.

Malthuksen parametri r annetaan usein kahden luvun erotuksena,

$$r = \beta - \mu,$$

missä β on *syntyvyysintensiteetti* (infinitesimaalisena aikavälinä $[t, t + dt]$ yksilö saa keskimäärin βdt jälkeläistä) ja μ on *kuolleisuusintensiteetti* (todennäköisyys kuolla aikavälinä $t, t + dt]$ on μdt) ja yleensä oletetaan, että β ja μ ovat vakioita. Tämä tarkoittaa, että yksilö tuottaa koko elämänsä aikana jälkeläisiä tasaiseen tahtiin nopeudella β ja että yksilöiden elinaika on eksponetiaalisesti jakautunut satunnaismuuttuja parametrilla μ, eli todennäköisyys että yksilö pysyy hengissä ainakin ikään a on $\exp(-\mu a)$. Jälkimmäinen oletus on yleensä yllättävän hyvä kaikille lajille paitsi mahdollisesti ihmiselle, kun taasen oletus etä β on vakio on karkea jopa bakteereille.

Alkuarvotehtävä (2.1) & (2.2) on helppo ratkaista (separoituva yhtälö):

$$N(t) = N_0 e^{rt}, \quad t \geq 0.$$

Kasvu (tai vähenminen jos $r < 0$) on siis eksponentiaalista, mikä selittää nimen *eksponentiaalinen kasvumalli.* Otsikossa mainittu vaihtoehtoinen nimi tulee siitä, että Thomas Malthus kuuluisassa esseessään “An Essay on the Principle of Population”(1798) esitti, että säännöstelemätön populaatio kasvaa eksponentiaalisesti. Mallissa (2.1) oletus r on vakio on tämän säännöstelemättömyyden matemaattinen ilmennys.

2.2.2 Logistinen malli

Pyritään seuraavaksi ottamaan huomioon populaation sisäistä kilpailua. Oletetaan kuten eksponentiaalisen kasvumallin tapauksessa, että syntyvyysintensiteetti β ja kuolleisuus intensiteetti μ (ja niinmuodoin myös $r = \beta - \mu$) ovat vakioita ja että $r > 0$. Lisäksi oletetaan, että yksilöt liikkuvat satunnaisesti ja kohtaavat toisia yksilöitä massavaikutuksen lain mukaisesti intensiteetillä α. Jokainen kohtaaminen johtaa taisteluun, jonka häviäjä poistuu populaatiosta. Tämä johtaa populaatiotasolla malliin

$$\frac{dN(t)}{dt} = rN(t) - \frac{1}{2}\alpha N(t)^2. \tag{2.3}$$

Nähdään, että malli (2.3) eroaa Malthuksen mallista ainoastaan kilpailua kuvaavan termin $-\frac{1}{2}\alpha N(t)^2$ kautta. Tämä termi selittyy seuraavasti: Taistelut tapahtuvat nopeudella α *yksilöä kohti*, jokaiseen kohtaamiseen osallistuu kaksi yksilöä (siis tekijä NN) ja jokaisessa taistelussa häviää puolet taistelijoista (tekijä $-\frac{1}{2}$). Kun määritellään $K = 2r/\alpha$, niin (2.3) voidaan kirjoittaa standardimuotoon

$$\frac{dN}{dt} = rN\left(1 - \frac{N}{K}\right). \tag{2.4}$$

Parametria K kutsutaan *ympäristön kantokyvyksi.*

Yhtälön (2.4) oikea puoli riippuu pelkästään N:stä, joten yhtälö on separoituva. Toisaalta se on myös Bernoull–yhtälö (1.44) parametrilla $\lambda = 2$. Osaamme siis ratkaista sen, jopa kahdella eri tavalla. Pystymme kuitenkin selvittämään ratkaisujen kvalitatiivista käyttäytymistä ratkaisematta yhtään differentiaaliyhtälöä seuraavasti. Tutkitaan ensin, onko yhtälöllä mahdollisesti *tasapainoratkaisuja*, eli ratkaisuja jotka ovat ajan suhteen vakioita. Ratkaisu $N(t)$ on vakio jos ja vain jos sen derivaatta häviää. Yhtälön (2.4) mukaan tämä tapahtuu jos ja vain jos

$$rN\left(1 - \frac{N}{K}\right) = 0. \tag{2.5}$$

Yhtälöllä (2.4) on siis kaksi tasapainoratkaisua, nimittäin yhtälön (2.5) juuret

$$N = 0 \quad \text{ja} \quad N = K.$$

Yhtälöstä (2.4) nähdään myös, että $dN/dt > 0$ jos $0 < N < K$ ja $dN/dt < 0$ jos $K < N$. Tästä seuraa heti, että $N(t)$ on kasvava kaikilla $t > 0$ jos $N(0) = N_0 \in (0, K)$ ja vähenevä jos $N(0) = N_0 > K$. Kummassakin tapauksessa

$$\lim_{t\to\infty} N(t) = K. \tag{2.6}$$

Ratkaisemme lopuksi yhtälön (2.4). Kuten jo totesimme, tämä on Bernoulliyhtälö parametrilla $\lambda = 2$. Kappaleesta 1.5.4 tiedämme siis, että muunnos

$$x = N^{1-\lambda} = \frac{1}{N} \tag{2.7}$$

palauttaa yhtälön lineaarisen muotoon. Kun sijoitetaan (2.7) yhtälöön (2.4), niin saadaan

$$\frac{dx}{dt} + rx = \frac{r}{K}. \tag{2.8}$$

Vastaavan homogeeniyhtälön yleinen ratkaisu on

$$x_h(t) = Ce^{-rt}$$

ja täydellisen yhtälön eräs yksityisratkaisu on

$$x_1(t) = \frac{1}{K}.$$

Yhtälön (2.8) yleinen ratakaisu on siis

$$x(t) = x_h(t) + x_1(t) = Ce^{-rt} + \frac{1}{K},$$

ja näin ollen alkuperäisen yhtälön (2.4) yleinen ratkaisu on

$$N(t) = \frac{1}{x(t)} = \frac{1}{Ce^{-rt} + \frac{1}{K}} = \frac{K}{CKe^{-rt} + 1}.$$

Tästäkin näkee, että $N(t)$:n rajaravo on K (vrt. (2.6)).

2.2.3 Lotkan ja Volterran peto-saalismalli

Tarkastellaan peto- ja saalislajin muodostamaa suljettua ekosysteemiä. Tässä sana "suljettu"tarkoittaa sitä, että migraatiota ei oteta huomioon. Olkoon x saaliin tiheys, toisin sanoen, x ilmoittaa montaako saalisyksilöä on pinta-alaa kohti. Olkoon y vastaavasti saalistajan eli pedon tiheys. *Lotkan ja Volterran*[1] *peto-saalismalli* kuvaa ekosysteemin aikakehitystä seuraavan differentiaaliyhtälöryhmän avulla.

$$\begin{aligned} \dot{x} &= rx - bxy, && (2.9) \\ \dot{y} &= cxy - \delta y. && (2.10) \end{aligned}$$

Tässä r, b, c ja δ ovat positiivisia vakioita. Koska tiheys ei tietenkään voi olla negatiivinen, niin tutkimme yhtälöryhmää (2.9) & (2.10) vain ensimmäisessä neljänneksessä

$$\mathbb{R}^2_+ = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0, y \geq 0\right\}.$$

Alkuarvotehtävässä tunnetaan systeemin tila hetkellä $t = 0$:

$$\begin{aligned} x(0) &= x_0, && (2.11) \\ y(0) &= y_0. && (2.12) \end{aligned}$$

Ennen kuin yritämme ratkaista yhtälöryhmää, teemme muutaman tärkeän havainnon.

[1] Biologi Umberto D'Ancona lähestyi appeaan Vito Volterraa etsiessään selitystä Mustan meren kalakantohen oudolle käytökselle: Ensimmäisen maailmansodan aikana Mustalla merellä oli kalastettu hyvin vähän, ja sodan päätyttyä oli suuri yllätys havaita että saaliskalojen populaatio oli romahtanut. Yhdysvaltalainen biologi ?. Lotka päätyi myöhemmin itsenäisesti samaan malliin.

1. Vakiofunktio $y = 0$ toteuttaa yhtälön (2.10) riippumatta funktiosta x. Kun $y = 0$ sijoitetaan yhtälöön (2.9), niin saadan

$$\dot{x} = rx. \tag{2.13}$$

Tämähän on Malthuksen malli (2.1). Toisin sanoen, jos petopopulaatio puuttuu ekosysteemistä ($y_0 = 0$), niin saalispopulaatio kasvaa eksponentiaalisesti ($x(t) = x_0 \exp(rt)$) Malthuksen parametrilla r.

2. Vastaavasti todetaan, että vakiofunktion $x = 0$ toteuttaa yhtälön (2.9) riippumatta y:stä. Kun $x = 0$ sijoitetaan yhtälöön (2.10), niin saadaan

$$\dot{y} = -\delta y. \tag{2.14}$$

Siis: ilman ruokaa ($x_0 = 0$) petopopulaatio vähenee eksponentiaalisesti kohti nollaa ($y(t) = y_0 \exp(-\delta t)$), se yksinkertaisesti kuolee nälkään.

3. Kohdat 1. ja 2. osoittavat että positiiviset koordinaattiakselit ovat *invariantteja*. Toisin sanoen, jos systeemin tila (x, y) jonakin ajanhetkenä on koordinaattiakselilla, niin se pysyykin tällä akselilla kaikilla t:n arvoilla. Näin pitääkin olla: jos jokin laji puuttuu suljetusta ekosysteemistä, niin se ei synny itsestään myöhemmin.[2]

4. Myös ensimmäinen neljännes on invariantti. Tulemme myöhemmin todistamaan yksikäsitteisyyslauseen, jonka mukaan annetun tason pisteen (x_0, y_0) kautta kulkee täsmälleen yksi ratkaisukäyrä. Ratkaisukäyrät eivät siis leikkaa toisiaan. Koska kohtien 1. ja 2. mukaan positiiviset koordinaattiakselit ovat ratkaisukäyriä, niin mikään ensimmäisessä neljänneksessä alkava rata ei poistu ensimmäisestä neljänneksestä.

5. Selvästi $(x, y) = (0, 0)$ on systeemin (2.9) & (2.10) *tasapainoratkaisu*, se on, ajasta riippumaton ratkaisu eli vakioratkaisu. Etsitään seuraavaksi muut madolliset tasapainoratkaisut. Nämä löydetään asettamalla $\dot{x} = 0, \dot{y} = 0$ (sillä vakion derivaatta on nolla) ja ratkaisemalla näin saatu algebrallinen yhtälö:

$$\begin{aligned} 0 &= rx - bxy, && (2.15) \\ 0 &= cxy - \delta y. && (2.16) \end{aligned}$$

Todettiin jo kohdissa 1. ja 2. että origo on ainoa koordinaatiakseleilla sijaitseva tasapainokohta. Oletetaan siis että $x \neq 0$ ja $y \neq 0$. Tällöin

[2] Vasta Louis Pasteur (1864) pystyi vakuuttavasti osoittamaan, ettei *alkusynty* ole mahdollista.

(2.15) ja (2.16) antavat:

$$x = \overline{x} := \frac{\delta}{c} \tag{2.17}$$

$$y = \overline{y} := \frac{r}{b} \tag{2.18}$$

Systeemillä on siis niin kutsutun *triviaaliratkaisun* $(x, y) = (0, 0)$ lisäksi täsmälleen yksi ratkaisu $(x, y) = (\delta/c, r/b)$. **Tähän muutettu 10.10.2007/Petri Ola**

6. Yhtälöiden (2.15) ja (2.16) määräämät suorat viivat jakavat ensimmäisen neljänneksen neljään alueeseen, joissa x:n ja y:n derivaattojen merkit vaihtelevat seuraavan taulukon mukaisesti.

	$x < \overline{x}$	$x > \overline{x}$
$y > \overline{y}$	$\dot{x} < 0$, $\dot{y} < 0$	$\dot{x} < 0$, $\dot{y} > 0$
$y < \overline{y}$	$\dot{x} > 0$, $\dot{y} < 0$	$\dot{x} > 0$, $\dot{y} > 0$

Tästä päättelemme, että ratkaisukäyrät kiertävät ei-triviaalin tasapainokohdan ympäri vastapäivään.

Huomaamme, että pystyimme sanomaan suhteellisen paljon systeemin (2.9) & (2.10) ratkaisujen kvalitatiivisesta käyttäytymisestä ratkaisematta itse yhtälöryhmää! Ryhdymme nyt ratkaisemaan yhtälöryhmää (2.9) & (2.10). Koska me tunnemme systeemin dynamiikan koordinaattiakseleilla, niin oletamme jatkossa, että $x \neq 0$, $y \neq 0$.

Kun kerrotaan yhtälö (2.9) puolittain lausekkeella $-\frac{1}{x}(cx - \delta)$ ja yhtälö (2.10) lausekkeella $\frac{1}{y}(r - by)$ ja lasketaan näin saadut yhtälöt yhteen, niin saadaan

$$\dot{x}\left(\frac{\delta}{x} - c\right) + \dot{y}\left(\frac{r}{y} - b\right) = 0.$$

Koska $\frac{d}{dt}\log x = \frac{\dot{x}}{x}$, niin tämä voidaan kirjoittaa muotoon

$$\frac{d}{dt}\left(\delta \log x - cx + t \log y - by\right) = 0$$

tai yhtäpitävästi

$$\frac{d}{dt}\left(cH(x) + bG(y)\right) = 0, \tag{2.19}$$

missä

$$H(x) := \overline{x}\log x - x$$

ja

$$G(y) := \overline{y} \log y - y.$$

Integroidaan (2.19):

$$V(x, y) := cH(x) + bG(y) = C. \tag{2.20}$$

Yhtälö (2.20) on ratkaiukäyrän eli radan yhtälö implisiittimuodossa. $V(x, y)$ pysyy siis vakiona, minkä tähden sitä kutsutaan *liikevakioksi*.

Funktiolle H pätee

$$\frac{dH}{dx} = \frac{\overline{x}}{x} - 1, \quad \frac{d^2H}{dx^2} = -\frac{\overline{x}}{x^2} < 0 \tag{2.21}$$

ja

$$\lim_{x \to 0+} H(x) = -\infty, \quad \lim_{x \to \infty} H(x) = -\infty. \tag{2.22}$$

$H(x)$ saavuttaa siis maksiminsa pisteessä $x = \overline{x}$. Vastaavasti nähdään, että $G(y)$ saavuttaamaksiminsa pisteessä $y = \overline{y}$. Funktiolla $V(x, y) := cH(x) + bG(y)$ on siis yksikäsitteinen globaali maksimi pisteessä $(x, y) = (\overline{x}, \overline{y})$. Tuloksista (2.21) & (2.22) seuraa, että $V(x, y)$ vähenee aidosti maksimiarvostaan $-\infty$:ään pitkin jokaista pisteestä $(\overline{x}, \overline{y})$ lähtevää sädettä. Tämä tarkoittaa sitä, että $V(x, y) = C$ täsmälleen yhdessä säteen pisteessä (x, y) jos $C < \max V$ (jos $C > \max V$, niin yhtälöllä $V(x, y) = C$ ei tietenkään ole ratkaisua). Tämä osoittaa, että V:n tasa-arvokäyrät (2.20) ovat umpinaisia käyriä. Systeemin tila liikkuu siis pitkin tasa-arvokäyrää pysähtymättä, koska tasa-arvokäyrälla ainakin toinen derivaatoista $\dot{x}$, $\dot{y}$ poikkeaa nollasta. Ennemmin taikka myöhemmin syteemi palaa alkutilaansa. Toisin sanoen, yhtälöryhmän (2.9) & (2.10) kaikki ratkaisut $t \mapsto (x(t), y(t))$ joille $x_0 > 0$, $y_0 > 0$ (paitsi tasapainoratkaisu) ovat jaksollisia.

Olkoon $t \mapsto (x(t), y(t))$ systeemin (2.9) & (2.10) jokin jaksollinen ratkaisu ja olkoon T sen jakso:

$$x(T) = x(0), \quad y(T) = y(0). \tag{2.23}$$

Osoitamme seuraavaksi, että populaatiotiheyksien keskiarvot yhtyvät vastaaviin tasapainoarvoihin, toisin sanoen, väitämme, että

$$< x > \ := \ \frac{1}{T} \int_0^T x(t) dt = \overline{x}, \tag{2.24}$$

$$< y > \ := \ \frac{1}{T} \int_0^T y(t) dt = \overline{y}. \tag{2.25}$$

Yhtälöstä (2.9) saadaan

$$\frac{d}{dt}\log x = \frac{\dot{x}}{x} = r - by$$

josta integroimalla

$$\int_0^T \frac{d}{dt}\log x(t)dt = \int_0^T (r - by(t)dt$$

eli

$$\log x(T) - \log x(0) = rT - b\int_0^T y(t)dt. \tag{2.26}$$

Kun sijoitetaan (2.23) yhtälöön (2.26), niin saadan

$$\frac{1}{T}\int_0^T y(t)dt = \frac{r}{b} = \overline{y}$$

eli (2.25) pätee. Vastaavalla tavalla osoitetaan, että (2.25) on voimassa.

2.3 Tartuntatautimallit

Tässä kappaleessa tutkitaan tartuntataudin leviämistä suljetussa populaatiossa matemaattisten mallien avulla.

2.3.1 SIS-malli

Tarkastellaan tarttuvaa tautia, joka ei anna pitkäaikaista immuniteettia sairaudesta toipuneelle. Oletetaan, että mahdollinen immuniteettijakso voidaan jättää huomioimatta. Oletetaan lisäksi, että populaatio on demografisessa tasapainossa, toisin sanoen, aikayksikössä kuolee ja syntyy yhtä monta yksilöä. Populaatio jaetaan kahteen luokkaan: S ja I. Symboli S tulee englannin kielen sanasta *susceptible* (suom. *altis*) ja I snasta *infective* (suom. *infektoitunut*). Luokkaan S kuuluvat siis kaikki terveet, mutta taudille alttiit yksilöt. I-luokan yksilöt sairastavat tautia ja voivat tartuttaa S-luokan yksilöitä.

Infektoitumisvoima F on määritelmän mukaan alttiin yksilön todennäköisyys tulla tartutetuksi aikayksikköä kohti. Oletamme, että F on suoraan verrannollinen infektoituneiden lukumäärään:

$$F = \beta I.$$

Tämä oletus vastaa kemiallisen kinetiikan massavaikutuksen lakia. Verrannollisuuskerrointa β kutsutaan *tarttumisintensiteetiksi*.

Oletamme, että aikayksikköä kohti infektoituneella yksilöllä on vakiotodennäköisyys α toipua sairaudesta. Tämä oletus on yhtäpitävä sen kanssa, että taudin kesto on eksponentiaalisesti jakautunut parametrilla α.

Tehtyjen oletusten perusteella voimme formuloida seuraavan differentiaaliyhälömallin:

$$\frac{dS}{dt} = -\beta SI + \alpha I, \tag{2.27}$$

$$\frac{dI}{dt} = \beta SI - \alpha I. \tag{2.28}$$

Laskemalla yhteen yhtälöt (2.27) ja (2.28) saadaan

$$\frac{d}{dt}(S+I) = 0,$$

josta integroimalla

$$S + I = N, \tag{2.29}$$

missä vakio N on populaation koko. Yhtälöryhmä (2.27) ja (2.28) redusoituu skalaariyhtälöksi

$$\frac{dI}{dt} = \beta I \left(N - \frac{\alpha}{\beta} - I \right) \tag{2.30}$$

kun yhtälöön (2.28) sijoitetaan $S = N - I$. Yhtälö (2.30) on logistinen yhtälö (2.4) parametreilla

$$K = N - \frac{\alpha}{\beta}, \quad r = \beta \left(N - \frac{\alpha}{\beta} \right).$$

Jos $N - \frac{\alpha}{\beta} < 0$, niin kaikki ratkaisut suppenevat kohti nollaa, toisin sanoen, tauti ei jää populaatioon pysyvästi eikä edes synny ohimenevää *epidemiaa*. Jos taasen $N - \frac{\alpha}{\beta} > 0$, niin kaikki ratkaisut (paitsi tauditon ratkaisu $I \equiv 0$) suppenevat kohti tasapainoratkaisua $I = N - \frac{\alpha}{\beta}$. Tässä tapauksessa tauti on *endeeminen.* [3]

Otetaan käyttöön parametri

$$R_0 := \frac{\beta}{\alpha} N. \tag{2.31}$$

[3] Sana epidemia tulee kreikan kielen sanasta $\dot{\varepsilon}\pi\iota\delta\eta\mu\acute{\iota}\alpha$ (suom. vierailu, oleskelu muukalaisena jossakin), joka puolestaan tulee prepositiosta $\dot{\varepsilon}\pi\iota$ (suom. -lla, -lle, päälle, luona, jne.) sekä substantiivista $\delta\tilde{\eta}\mu o\varsigma$ (suom. kansa). Endemia tulee sanasta $\dot{\varepsilon}\nu\delta\eta\mu\acute{\iota}\alpha$ (suom. oleskelu). Prepositio $\dot{\varepsilon}\nu$ vastaa suomen inessiiviä.

Kuva 2.1: SIS-mallin bifurkaatiokuvio. Tauditon tasapainokohta $i = 0$ on stabiili kun $R_0 < 1$ ja epästabiili kun $R_0 > 1$. Endeeminen tasapainokohta $i = (1 - 1/R_0)$ on stabiili kun $R_0 > 1$.

R_0 on yhden infektoituneen yksilön aiheuttamien sekundaaritapausten odotusarvo taudittomassa populaatiossa. Toisin sanoen, jos taudittomaan populaatioon tuodaan yksi infektoitunut yksilö, niin tämä tartuttaa keskimäärin R_0 yksilöä. Olkoon vielä

$$i := \frac{I}{N}$$

infektoituneiden osuus koko populaatiosta. Edellä johdettu kynnysilmiö voidaan nyt esittää *bifurkaatiokuviona*, missä *bifurkaatioparametrina* on R_0 (kuva 2.1).

2.3.2 SIR-malli

Tässä kappaleessa mallinnetaan taudin kulkua tapauksessa jossa taudista toipunut saa elinikäisen immuniteetin. Nyt toipunut ei siirrykään takaisin luokkaan S, vaan uuteen luokkaan R (englannin kielen sanasta *removed*, suom. poistettu). Malli saa siis muodon

$$\frac{dS}{dt} = -\beta SI, \tag{2.32}$$

$$\frac{dI}{dt} = \beta SI - \alpha I, \tag{2.33}$$

$$\frac{dR}{dt} = \alpha I. \tag{2.34}$$

Aivan kuten SIS-mallissa, kokonaispopulaatio $N = S + I + R$ pysyy vakiona. Riittää siis tarkastella yhtälöparia (2.32) & (2.33); kun S ja I on ratkaistu niistä, R saadaan yhtälöstä $R = N - S - I$.

Siirrytään käyttämään osuuksia

$$s := \frac{S}{N}, \quad i := \frac{I}{N},$$

jaetaan yhtälö (2.32) yhtälöllä (2.33) ja käytetään R_0:n määritelmää (2.31):

$$\frac{di}{ds} = -1 + \frac{1}{R_0}\frac{1}{s}. \tag{2.35}$$

Integroidaan yhtälö (2.35):

$$i = -s + \frac{1}{R_0}\ln s + C. \tag{2.36}$$

Kuva 2.2: SIR-mallin ratkaisukäyrä $i = 1 - s + \frac{1}{R_0} \ln s$ kun $R_0 = 1.5$, 3, 4.5 ja 6.

Taudittomassa populaatiossa $i = 0$ ja $s = 1$. Kun nämä arvot sijoitetaan yhtälöön (2.36), niin integroimisvakion arvoksi saadaan $C = 1$. Ratkaisukäyrä si-tasossa on siis

$$i = 1 - s + \frac{1}{R_0} \ln s. \tag{2.37}$$

Todetaan, että jos $R_0 < 1$, niin käyrä (2.37) on s-akselin alapuolella (i-arvot ovat negatiivisia). Näillä käyrillä ei tietenkään ole biologista relevanssia. Tulkinta on, että jos $R_0 < 1$, niin epidemia ei voi puhjeta. Kuvaan 2.2 on piirretty ratkaisukäyrä muutamalla R_0:n arvolla. Kuvasta nähdään, että kyseessä on ohimenevä epidemia. Mitä suurempi R_0, sitä suurempi osuus populaatiosta sairastuu tautiin. Epidemian lopullinen koko voidaan helposti laskea yhtälöstä (2.37). Annetaan t:n mennä äärettömään yhtälössä (2.37). Tällöin $i(t) \to 0$ ja $s(t) \to s_\infty := s(\infty)$. Siis:

$$0 = (1 - s_\infty) + \frac{1}{R_0} \ln s_\infty. \tag{2.38}$$

Yhtälöllä (2.38) on kaksi juurta: tauditonta alkutilaa vastaava $s = 1$ ja s_∞.

2.4 Takaa-ajo mallit

Oletetaan, että takaa-ajettava (eli saalis) liikkuu annettua käyrää $(x(t), y(t))$ pitkin ja takaa-ajaja liikkuu koko ajan suoraan kohti saalista. Mitä käyrää pitkin takaa-ajaja kulkee?

Esimerkki 2.2. Katsotaan yksinkertaista mallia, missä saalis kulkee xy-tason y-akselin suuntaista suoraa pitkin. Oletetaan seuraavaa:

- Hetkellä $t = 0$ saalis (S) on pisteessä $(b, 0)$, $b > 0$
- Hetkellä $t = 0$ takaa-ajaja (T) on origossa
- Saalis (S) on hetkellä $t > 0$ pisteessä $(b, \beta t)$ ja takaa-ajaja (T) on pisteessä $(x(t), y(t))$
- Oletamme, että takaa-ajajan (T) nopeus $\alpha > \beta > 0$

Tehtävän on siis määrätä $(x(t), y(t))$ tai ainakin y x:n funktiona.

Oletuksesta seuraa, että takaa-ajaja etenee suoraan kohti saalista ajan hetkellä t, eli käyrän $(x(t), y(t))$ tangentti osoittaa suoraan kohti (S):ää. Nyt tangentin kulmakertoimelle saadaan yhtälö

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y - \beta t}{x - b}. \tag{2.39}$$

Emme voi ratkaista tätä suoraan, sillä sekä y että x riippuvat t:stä. Pyrimmekin seuraavaksi eliminoimaan t eli löytämään yhtälö, josta t voitaisiin ratkaista. Tähän käytämme tietoa, että takaa-ajajan nopeus on vakio: ajassa t kuljettu matka on sama kuin käyrän $\{ (s, y(s)) \mid s \in [0, x(t)] \}$ pituus. Koska nopeus on vakio, on tämä pituus $= \alpha t$. Käyrän pituus sadaan kaavalla

$$\int_0^{x(t)} \sqrt{1 + (y'(s))^2} ds,$$

joten

$$t = \frac{1}{\alpha} \int_0^x \sqrt{1 + (y'(s))^2} ds.$$

Siispä saamme

$$\begin{aligned} y'(x) &= \frac{y - \beta/\alpha \int_0^x \sqrt{1 + (y'(s))^2} ds}{x - b} \\ &\iff \alpha(b - x)y' + \alpha y = \beta \int_0^x \sqrt{1 + (y'(s))^2} ds \end{aligned}$$

Derivoidaan tämä puolittain x:n suhteen (jotta pääsisimme eroon integraalitermistä):

$$\begin{aligned} &- \alpha y' + \alpha(b - x)y'' + \alpha y' = \beta\sqrt{1 + (y')^2} \\ &\iff \alpha(b - x)y'' = \beta\sqrt{1 + (y')^2} \\ &\overset{w:=y'}{\iff} \alpha(b - x)w' = \beta\sqrt{1 + w^2} \end{aligned}$$

Saimme siis separoituvan yhtälön w:lle.

$$\begin{aligned} &\int^w \frac{dw}{(1 + w^2)^{1/2}} = \int^x \frac{\beta}{\alpha(b - x)} = -\frac{\beta}{\alpha} \ln|b - x| + C; \\ &\int^w \frac{dw}{(1 + w^2)^{1/2}} = \ln(w + \sqrt{1 + w^2}; \\ &\implies w + \sqrt{1 + w^2} = C'(b - x)^{-\beta/\alpha} \end{aligned}$$

Alkuehdon $w(0) = y'(0) = 0$ nojalla $1 = C'b^{-\beta/\alpha} \iff C' = b^{\beta/\alpha}$. Saadaan siis

$$w + \sqrt{1+w^2} = b^{\beta/\alpha}(b-x)^{-\beta/\alpha} = (1-x/b)^{-\beta/\alpha} =: \lambda$$

Tästä saadaan w ratkaistua:

$$\sqrt{1+w^{-2}} = \frac{\lambda}{w} - 1 \iff 1 + w^{-2} = \frac{\lambda^2}{w^2} - 2\frac{\lambda}{w} + 1 \iff 1 = \lambda^2 - 2\lambda w$$
$$\iff w = \frac{1}{2}(\lambda - \lambda^{-1}) = \frac{1}{2}\Big((1-\frac{x}{b})^{-\beta/\alpha} - (1-\frac{x}{b})^{\beta/\alpha}\Big)$$

Integroimalla tämä saadaan y ratkaistua:

$$y(x) = \frac{1}{2}\int^x \Big((1-\frac{x}{b})^{-\beta/\alpha} - (1-\frac{x}{b})^{\beta/\alpha}\Big)dx$$
$$= -\frac{b}{2}\Big(\frac{(1-\frac{x}{b})^{1-\beta/\alpha}}{1-\beta/\alpha} - \frac{(1-\frac{x}{b})^{1+\beta/\alpha}}{1+\beta/\alpha}\Big) + C_2$$

Integroimisvakio C_2 saadaan ratkaistua alkuehdosta $y(0) = 0$. Ratkaisuksi saadaan

$$C_2 = \frac{b\alpha\beta}{\alpha^2 - \beta^2}.$$

2.5 Eulerin menetelmä

Käytännössä useimpia 1. kertaluvun differentiaaliyhtälöitä ei pystytä ratkaisemaan suljetussa muodossa: voi olla, ettei ne ole mitään niistä tyypeistä, joita olemme käsitelleet tai esimerkiksi kerroinfunktioita ei tiedejä kaikilla $x \in I$; voimme mitata niiden arvoja vain äärellisen monessa pisteessä. Voimme kuitenkin pyrkiä ratkaisemaan yhtälöitä numeerisesti. Yksinkertaisin numeerinen menetelmä on ns. *Eulerin menetelmä*.

Tarkastellaan yksinkertaista alkuarvotehtävää

$$y'(x) = f(x, y(x)), \quad y(x_0) = y_0 \tag{2.40}$$

ja oletetaan, että f ja $\frac{\partial f}{\partial y}$ ovat jatkuvia tason $\mathbb{R}^2$ nauhassa $S = \{a < x < b, -\infty < y < \infty\}$ ja olkoon $I = (a,b) \ni x_0$. Kurssin toisessa osassa näytetään että näillä oletuksilla alkuarvotehtävällä (2.40) on yksikäsitteinen ratkaisu välillä I.

Pyritään löytämään approksimoiva ratkaisu, joka on murtoviiva. Toimitaan seuraavasti: olkoon $h > 0$ hilan tiheys ja

$$x_n = x_0 + nh, \quad n = 0, \dots, M, \quad M = [(b-a)/h],$$

missä $[x]$ on $x \in \mathbb{R}$ kokonaisosa. Nyt alkuehdon nojalla $y(x_0) = y_0 \Longrightarrow y'(x_0) = f(x_0, y_0)$. Ajatus on että lähdetään pisteestä (x_0, y_0) liikkeelle mrtoviivalla, jonka kulmakerroin pisteessä x_0 on $y'_0 := y'(x_0) = f(x_0, y_0$. Seurataan tätä suoraa, kunnes x-koordinaatti saa arvon $x_1 = x_0 + h$. Tällöin arvo pisteessä x_1 on $y_1 = y_0 + y'_0 h$. Approksimoidaan tällä y:n arvoa pisteessä x_1 ja lasketaan derivaatan approksimaatio differentiaaliyhtälöä käyttäe

$$y'_1 = f(x_1, y_1).$$

Jatketaan näin x_1:stä pisteeseen x_2, jolloin saadaan algoritmi

$$\begin{cases} x_{n+1} := x_n + h \\ y_{n+1} := y_n + hf(x_n, y_n) \end{cases}$$

Tarkastellaan menetelmää yksinkertaisella esimerkillä.

Esimerkki 2.3. Katsotaan alkuarvotehtävää

$$y' = x\sqrt{y}, \quad y(1) = 4; \quad f(x, y) = x\sqrt{y}$$

Tällä on eksplisiittinen ratkaisu:

$$\frac{dy}{\sqrt{y}} = xdx \Longrightarrow 2\sqrt{y} = \frac{1}{2}(x^2 + C) \Longrightarrow y = \frac{1}{16}(x^2 + C)^2$$

Alkuehdosta saadaan $2 = \sqrt{y(1)} = \frac{1}{4}(C + 1) \Longrightarrow C + 1 = 8$. Siis $C = 7$. (Huom. Ratkaisimme C:n $\sqrt{y}$:n yhtälöstä, jotta osasimme valita neliöön korottamisen aiheuttamasta kahdesta ratkaisusta C:lle sen oikean). Siis ratkaisu on

$$y(x) = \frac{1}{2}(x^2 + 7)^2.$$

Ratkaistaan sama alkuarvotehtävä Eulerin menetelmällä välillä $[1, 3/2]$ kun $h = 0,1$. Nyt $x_0 = 1$, $y_0 = 4$ joten $y'_0 = f(1, 4) = \sqrt{4} = 2$. Siispä

$$\begin{cases} x_1 = x_0 + h = 1,1 \\ y_1 = y_0 + 0,1 \times y'_0 = 4 + 0,1 \times 2 = 4,2 \\ y'_1 = x_1\sqrt{y_1} = 1,1 \times \sqrt{4,2} \approx 2,2543 \end{cases}$$

Jatkamalla tätä saamme tulokset

n	x_n	y_n	Tarkka arvo
0	1	4	4
1	1,1	4,2	4,21276
2	1,2	4,42543	4,45210
3	1,3	4,67787	4,71976
4	1,4	4,95904	4,01760
5	1,5	5,27081	5,34766

Viimeisessä askeleessa virhe on jo suuruusluokkaa $\sim 0,05$, mutta kuitenkin varsin hyvä.

Esimerkki 2.4. Tarkastellaan nyt alkuarvotehtävä $y' = y$, $y(0) = 1$. Tarkka ratkaisu on $y(x) = e^x$. Eulerin menetelmää käyttäen voimme yrittää laskea likiarvoja Neperin vakiolle e. Katsotaan kuinka tarkkoja likiarvot ovat: Haemme siis ratkaisuja välillä $[0,1]$ ja valitaan $h = 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}$ ja $\frac{1}{16}$. Saamme Eulerin menetelmällä seuraavat likiarvot $y(1) = e$:lle:

h	Euler-approks. e:lle
1	2,0
1/2	2,25
1/4	2,44141
1/8	2,56578
1/16	2,63793

Havaitaan, että likiarvot tuntuvat lähestyvän todellista arvoa, mutta käytännössä menetelmä on aivan liian hidas.

Luku 3

Lineaariset 2. kertaluvun yhtälöt

3.1 Lineaariset differentiaalioperaattorit

Yleinen muoto 2. kertaluvun differentiaaliyhtälölle on

$$F(x, y, y', y'') = 0, \tag{3.1}$$

missä F on sopivassa $\mathbb{R}^4$:n alueessa määritelty funktio. Näiden yleinen teoria on vaikeaa, ja eksplisiittisiä ratkaisuja saadaan vain erikoistapauksissa.

Jatkossa keskitymme ns. *lineaarisiin yhtälöihin*. Tällä tarkoitetaan, että yhtälössä (3.1) funktio F on lineaarinen 3 jälkimmäisen muuttujan suhteen (eli y:n ja sen derivaattojen suhteen). Lineaarinen yhtälö on siis muotoa

$$a_2(x)y''(x) + a_1(x)y'(x) + a_0(x)y(x) = b(x), \tag{3.2}$$

missä yleensä a_i:t ja b ovat jatkuvia funktiota annetulla välillä $I \subseteq \mathbb{R}$. Jos a_i:t ovat kaikki vakiofunktioita, niin yhtälö on *vakiokertoiminen*. Näiden yhtälöiden teoria on huomattavasti helpompi kuin yleinen lineaarinen tilanne.

Oletetetaan, että $a_2(x) \neq 0$ kaikilla $x \in I$. Jakamalla puolittain (3.2) a_2:lla saamme yhtälön *standardimuotoon*:

$$\begin{cases} y''(x) + p(x)y'(x) + q(x)y(x) = g(x), \\ p(x) = a_1(x)/a_2(x), \quad q(x) = a_0(x)/a_2(x), \quad g(x) = b(x)/a_2(x) \end{cases} \tag{3.3}$$

Jos $g \equiv 0$, niin yhtälö on *homogeeninen*, muulloin yhtälö on *epähomogeeninen*. Homogeeninen yhtälö on siis

$$y''(x) + p(x)y'(x) + q(x)y(x) = 0. \tag{3.4}$$

Merkitään lyhyesti

$$L(y) := y'' + p(x)y' + q(x)y.$$

L on ns. 2. kertaluvun *lineaarinen differentiaalioperaattori* (DO). Lineaarisuus implikoi seuraavan lauseen

Lause 3.1. *Oletetaa, että L on lineaarinen DO ja $y_1, y_2 \in C^2(I)$, $c \in \mathbb{R}$ vakio. Tällöin*

$$L(y_1 + cy_2) = L(y_1) + cL(y_2).$$

Tällä on tärkeä korollaari:

Seurauslause 3.2. *i) Jos $y_1, y_2 \in C^2(I)$ ovat homogeenisen yhtälön* (3.4) *ratkaisuja, niin $c_1y_1 + c_2y_2$ on myös ratkaisu, kun $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ ovat vakioita.*

ii) Oletetaan, että homogeenisella alkuarvotehtävällä

$$\begin{cases} y'' + p(x)y' + q(x)y = 0 \\ y(x_0) = y'(x_0) = 0, \qquad x_0 \in I \text{ kiinteä piste} \end{cases} \tag{3.5}$$

on vain triviaaliratkaisu $y \equiv 0$. *Tällöin vastaavalla epähomogeenisella alkuarvotehtävällä*

$$\begin{cases} y'' + p(x)y' + q(x)y = b(x) \\ y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y_1, \qquad x_0 \in I \text{ kiinteä piste} \end{cases} \tag{3.6}$$

on korkeintaan *yksi ratkaisu $y \in C^2(I)$.*

Todistus. *i)* Jos y_1, y_2 ovat (HY):n (3.4) ratkaisuja, niin $L(c_1y_1 + c_2y_2) = c_1L(y_1) + c_2L(y_2) = c_1 \times 0 + c_2 \times 0 = 0$. Siis $c_1y_1 + c_2y_2$ on (HY):n (3.4) ratkaisu.

ii) Jos $y_1, y_2 \in C^2(I)$ ovat kaksi epähomogeenisen alkuarvotehtävän ratkaisua (3.6), niin $y = y_1 - y_2$ on homogeenisen alkuarvotehtävän (3.5) ratkaisu. Oletuksen nojalla $y \equiv 0 \implies y_1 = y_2$.

□

Huomautus 3.3. Olemme nyt vaatineet enemmän alkuarvodataa tunnetuksi kuin 1. kertaluvun tapauksessa, sekä $y(x_0)$:n ja $y'(x_0)$:n. Muitakin tapoja antaa alkuarvoja, mutta ”nyrkkisääntönä”2. kertaluvun yhtälöiden ratkaisuissa on kaksi integroimisvakiota/vapausastetta, joten niiden kiinnittämiseen tarvitaan kaksi riippumatonta ehtoa.

Seuraavaksi esitämme yksikäsitteisyys- ja olemassololauseen:

Lause 3.4 (2. kl:n lineaarisen yhtälön ratkaisun olemassaolo- ja yksikäsittesyys)**.** *Oletetetaan, että* $I = (a, b)$*,* $x_0 \in I$ *ja* $p, q \in C(I)$*. Tällöin jokaisella* $y_0, y_1 \in \mathbb{R}$ *alkuarvotehtävällä*

$$\begin{cases} y'' + p(x)y' + q(x)y = b(x) \\ y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y_1 \end{cases}$$

on välillä I *yksikäsitteinen ratkaisu.*

Todistus. Kurssin loppuosassa. □

3.2 Perusjärjestelmä

Esimerkki 3.5. Katsotaan ensin esimerkkiä

$$y'' - y = 0. \tag{3.7}$$

Yhtälön ratkaisuja ovat $y_1 = e^x$ ja $y_2 = e^{-x}$. Oikeastaan jokainen yhtälön (3.7) ratkaisu on y_1:n ja y_2:n lineaariyhdiste:

$$y(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x).$$

Tämä nähdään seuraavasti: katsotaan mielivaltaisia alkuehtoja

$$y(x_0) = y_0, \quad y'(x_0) = y_1. \tag{3.8}$$

Pyritään määräämään sellaiset vakiot c_1, c_2, että alkuehdot (3.8) totetuu:

$$\begin{cases} y_0 = y(x_0) = c_1 y_1(x_0) + c_2 y_2(x_0) = c_1 e^{x_0} + c_2 e^{-x_0} \\ y_1 = y'(x_0) = c_1 y_1'(x_0) + c_2 y_2'(x_0) = c_1 e^{x_0} - c_2 e^{-x_0} \end{cases},$$

eli saimme 2×2-lineaarisen yhtälöryhmän

$$\begin{pmatrix} e^{x_0} & e^{-x_0} \\ e^{x_0} & -e^{-x_0} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \end{pmatrix}$$

Koska yhtälösysteemin determinantti

$$\begin{vmatrix} e^{x_0} & e^{-x_0} \\ e^{x_0} & -e^{-x_0} \end{vmatrix} = e^{x_0} \cdot (-e^{-x_0}) - e^{x_0} \cdot e^{-x_0} = -1 - 1 = -2 \neq 0,$$

niin yhtälösysteemillä on ratkaisu. Yksikäsitteisyyslause implikoi, että muita ratkaisuja ei ole. Siis kaikki ratkaisut ovat lineaarikombinaatioita.

Tarkastellaan edellisen esimerkin motivoimana yleistä homogeenisen 2. kertaluvun alkuarvotehtävää

$$\begin{cases} \text{DY} & y'' + p(x)y' + q(x)y = 0 \\ \text{alkuehto:} & y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y_1. \end{cases} \tag{3.9}$$

Olkoot y_1 ja y_2 mielivaltaisia (3.9) DY:n ratkaisuja. Milloin kaikki DY:n ratkaisut saadaan näiden sopivina lineaariyhdisteinä? Tehdään yrite $y(x) = c_1y_1(x) + c_2y_2(x)$. Tällöin

$$\begin{cases} y(x_0) = c_1y_1(x_0) + c_2y_2(x_0) \\ y'(x_0) = c_1y_1'(x_0) + c_2y_2'(x_0) \end{cases}$$

Tästä yhtälöryhmästä voimme ratkaista *yksikäsitteisesti* vakiot c_1 ja c_2 jos ja vain jos yhtälöryhmän determinantti (kuten edellisessä esimerkissä)

$$W(y_1, y_2)(x_0) := \begin{vmatrix} y_1(x_0) & y_2(x_0) \\ y_1'(x_0) & y_2'(x_0) \end{vmatrix} = y_1(x_0) \cdot y_2'(x_0) - y_2(x_0) \cdot y_1'(x_0) \neq 0$$

Determinantti $W(y_1, y_2)(x_0)$ on ratkaisujen y_1 ja y_2 *Wronskin determinantti* pisteessä x_0. Olemme siis todistaneet:

Lause 3.6. *Jos $x_0 \in I$ ja y_1, y_2 ovat DY:n* (3.9) *ratkaisuja I:ssä, jolle Wronskin determinantti $W(y_1, y_2)(x_0) \neq 0$, niin jokainen DY:n ratkaisu on y_1:n ja y_2:n lineaariyhdiste.*

Vaikka edellisen lauseen ehto $W(y_1, y_2)(x_0) \neq 0$ vaikuttaa riippuvan sopivan pisteen x_0 valinnasta, niin itse asiassa on voimassa:

> jos $W(y_1, y_2)(x_0) \neq 0$ jollakin $x_0 \in I$, niin $W(y_1, y_2)(x) \neq 0$ kaikilla $x \in I$. T

Tämän osoittamiseksi merkitään

$$w(x) = W(y_1, y_2)(x) = y_1(x)y_2'(x) - y_2(x)y_1'(x);$$

Nyt derivoidaan w ja katsotaan, toteuttaako w jonkin differentiaaliyhtälön:

$$\begin{aligned} w'(x) &= y_1'(x)y_2'(x) + y_1(x)y_2''(x) - y_2'(x)y_1'(x) - y_2(x)y_1''(x) \\ &= y_1(x)y_2''(x) - y_2(x)y_1''(x) \overset{\text{DY}}{=} -y_1(x)\big(p(x)y_2'(x) + q(x)y_2(x)\big) \\ &+ y_2(x)\big(p(x)y_1'(x) + q(x)y_1(x)\big) = p(x)\big(y_2(x)y_1'(x) - y_1(x)y_2'(x)\big) \\ &= -p(x)w(x). \end{aligned}$$

Havaitaan siis, että w toteuttaa 1. kertaluvun separoituvan DY:n $w' = -pw$, joten

$$w(x) = C \exp\big(\int^x p(x)dx\big).$$

Jos nyt $w(x_0) \neq 0$, niin $C \neq 0 \implies w(x) \neq 0$ kaikilla $x \in I$.

Määritelmä 3.7. Ehdon $W(y_1, y_2)(x_0) \neq 0$ toteuttava pari yhtälön $y'' + py' + qy = 0$ ratkaisuja on *perusjärjestelmä*.

Eli toisen kertaluvun homogeenisen yhtälön täydellinen ratkaiseminen on palautettu perusjärjestelmän löytämiseen (mikä tosin ei aina ole helppoa!)

Esimerkki 3.8. Ratkaisut $y_1(x) = \cos 3x$, $y_2(x) = \sin 3x$ ovat yhtälön $y'' + 9y = 0$ perusjärjestelmä, sillä

$$W(y_1, y_2)(x) = \begin{vmatrix} \cos 3x & \sin 3x \\ -3\sin 3x & 3\cos 3x \end{vmatrix} = 3(\cos^2 3x + \sin^2 3x) = 3 \neq 0.$$

Usein riittää löytää jokin yhtälön $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$ ratkaisu. Toinen, perusjärjestelmän täydentävä ratkaisu saadaan sen jälkeen "kertaluvun pudotukselle":

Esimerkki 3.9 (Kertaluvun pudotus)**.** Oletetetaan, että

$$y_1''(x) + p(x)y_1'(x) + q(x)y_1(x) = 0.$$

Pyritään löytämään sellainen funktio $f \neq 1$, että

$$y(x) = f(x)y_1(x)$$

on myös ratkaisu. Nyt

$$\begin{cases} y'(x) = f'(x)y_1(x) + f(x)y_1'(x) \\ y''(x) = f''(x)y_1(x) + 2f'(x)y_1'(x) + f(x)y_1''(x), \end{cases}$$

jolloin

$$\begin{aligned} y''(x) + p(x)y'(x) + q(x)y(x) &= y_1(x)f''(x) + \big(2y_1'(x) + p(x)y_1(x)\big)f'(x) \\ &\quad + f(x)\big(y_1''(x) + p(x)y_1'(x) + q(x)y_1(x)\big) \\ &= y_1(x)f''(x) + (2y_1'(x) + p(x)y_1(x))f'(x). \end{aligned}$$

Olkoon $h = f'$. Havaitaan, että y on DY:n ratkaisu, jos

$$y_1(x)h'(x) + \big(2y_1'(x) + p(x)y_1(x)\big)h(x) = 0.$$

Tämä on 1. kertaluvun lineaarinen h:lle (eli osaamme ratkaista sen!) Standardimuodossaan (kun $y_1(x) \neq 0$) yhtälö on

$$h'(x) + \frac{2y_1'(x) + p(x)y_1(x)}{y_1(x)}h(x) = 0.$$

Integroiva tekijä $\mu(x)$ on

$$\begin{aligned}\mu(x) &= \exp\Big(\int^x 2\frac{y_1'(x)}{y_1(x)} + p(x)dx\Big) = \exp(\ln(y_1(x))^2)\exp\Big(\int^x p(x)dx\Big)\\ &= (y_1(x))^2\exp\Big(\int^x p(x)dx\Big),\end{aligned}$$

joten

$$h(x) = \frac{1}{\mu(x)}\int^x 0\cdot\mu(x)dx = \frac{C}{y_1(x)^2}\exp\Big(-\int^x p(x)dx\Big).$$

Integroimalla h saadaan ratkaistua f ja kertomalla y_1:llä saadaan ratkaistua y;

$$y(x) = f(x)y_1(x) = y_1(x)\int^x h(x)dx = y_1(x)\int^x \frac{\exp\big(-\int p(t)dt\big)}{y_1(x)^2}dx$$

Muodostaako nyt y_1 ja y perusratkaisun, eli onko Wronskin determinantti $W(y_1, y) \neq 0$? Havaitaan, että

$$\frac{d}{dx}\Big(\frac{y(x)}{y_1(x)}\Big) = \frac{y'(x)y_1(x) - y_1'(x)y(x)}{y_1(x)^2} = \frac{W(y_1, y)(x)}{y_1(x)^2}$$

Toisaalta $y(x)/y_1(x) = f(x)$, joten

$$\frac{W(y_1, y)(x)}{y_1(x)^2} = \frac{df}{dx}(x) = h(x) = \frac{\exp\big(-\int p(x)dx\big)}{y_1(x)^2}.$$

Siis Wronskin determinantti

$$W(y_1, y)(x) = \exp\Big(-\int p(x)dx\Big) \neq 0,$$

eli y_1 ja y muodostavat perusjärjestelmän!

Lasketaan nyt ”kertaluvun pudotus”esimerkkiyhtälölle.

Esimerkki 3.10. Tarkastellaan yhtälöä $y'' - 2y' + y = 0$. Havaitaan helposti (kohta palataan tähän tarkemmin), että $y_1(x) = e^x$ on eräs ratkaisu. Pyritään määrittämään yhtälön perusryhmä. Tehdään tämä käyttämällä edellisen esimerkin kaavaa

$$y(x) = y_1(x) \int^x \frac{\exp(-\int p(t)dt)}{y_1(x)^2} dx.$$

Nyt $y_1(x) = e^x$ ja $p(x) = -2$, joten $-\int^x p(t)dt = 2x + C$, joten

$$y(x) = e^x \int^x \frac{e^{2x}}{e^{2x}} dx = xe^x.$$

Siis $y_1(x) = e^x$ ja $y_2(x) = xe^x$ on perusjärjestelmä.

3.3 Vakiokertoimiset 2. kertaluvun lineaariset yhtälöt

Seuraavaksi katsomme, kuinka *aina* löydämme perusjärjestelmän *vakiokertoimiselle* yhtälölle

$$\mathscr{L}(y) := y'' + ay' + by = 0, \quad a, b \in \mathbb{R}. \tag{3.10}$$

Yhtälön ratkaisemiseksi tehdään *yrite*: $y(x) = e^{rx}$, $r \in \mathbb{R}$. Nyt

$$y'(x) = re^{rx}, \quad y''(x) = r^2 e^{rx}.$$

Siis

$$\mathscr{L}(e^{rx}) = r^2 e^{rx} + are^{rx} + be^{rx} = (r^2 + ar + b)e^{rx}.$$

Koska $e^{rx} \neq 0$ aina, niin olemme osoittaneet seuraavan lauseen

Lause 3.11. *Funktio e^{rx} on yhtälön* (3.10) *ratkaisu joss r on polynomin $r^2 + ar + b = 0$ (reaalinen) juuri.*

Yhtälö $r^2 + ar + b = 0$ on differentiaaliyhtälön (3.10) *karakteristinen yhtälö* (KY).

Esimerkki 3.12. Määrää yhtälön $y'' + 5y' - 6y = 0$ perusjärjestelmä.
Ratkaisu: (KY)

$$r^2 + 5r - 6 = 0 \iff r = \frac{-5 \pm \sqrt{5^2 + 4 \cdot 6}}{2} = \frac{-5 \pm 7}{2} = \begin{cases} -6 \\ 1 \end{cases}$$

Siis juuret ovat $r = 1$ ja $r = -6$, joten $y_1(x) = e^x$ ja $y_2(x) = e^{-6x}$ ovat yhtälön ratkaisuja. Lasketaan Wronskin determinantti

$$W(y_1, y_2)(x) = \begin{vmatrix} e^x & e^{-6x} \\ e^x & -6e^{-6x} \end{vmatrix} = -6e^{-5x} - e^{-5x} = -7e^{-5x} \neq 0.$$

Siis $y_1, y_2) = (e^x, e^{-6x})$ on perusjärjestelmä.

Edellisen esimerkin tilanne ei ollut sattumaa, vaan yleisesti pätee

Lause 3.13. *Jos KY:llä* $r^2+ar+b = 0$ *on* kaksi *erillistä* reaalijuurta $r_1, r_2 \in \mathbb{R}$*, niin* (e^{r_1x}, e^{r_2x}) *on DY:n* (3.10) *perusjärjestelmä.*

Todistus. Harjoitustehtävä. □

Esimerkki 3.14. Ratkaise alkuarvotehtävä

$$\begin{cases} y'' + 2y'1 - y = 0, \\ y(0) = 0, y'(0) = -1 \end{cases}$$

Ratkaisu: (KY)

$$r^2 + 2r - 1 = 0 \Longleftrightarrow r = \frac{-2 \pm \sqrt{4+4}}{2} = -1 \pm \sqrt{2}.$$

Siis perusjärjestelmä on $(y_1(x), y_2(x)) := (e^{(-1+\sqrt{2})x}, e^{(-1-\sqrt{2})x})$. Etsitään nyt se y_1:n ja y_2:n lineaariyhdiste, joka toteuttaa alkuehdot. Olkoon $y(x) = c_1y_1(x) + c_2y_2(x)$. Alkuehdoista saadaan

$$\begin{cases} 0 = y(0) = c_1 + c_2 \\ -1 = y'(0) = (-1+\sqrt{2})c_1 + (-1-\sqrt{2})c_2 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} c_1 = -c_2 \\ -2\sqrt{2}c_2 = -1 \end{cases}$$
$$\Longleftrightarrow \begin{cases} c_1 = -\frac{1}{2\sqrt{2}} \\ c_2 = \frac{1}{2\sqrt{2}} \end{cases}$$

Siis alkuarvotehtävän yksikäsitteinen ratkaisu on

$$y(x) = \frac{1}{2\sqrt{2}}(e^{-(1+\sqrt{2})x} - e^{-(1-\sqrt{2})x}) = -\frac{e^{-x}}{\sqrt{2}} \sinh(\sqrt{2}x)$$

Vielä on käsittelemättä tilanteet, jolloin karakteristisella yhtälöllä on *kaksinkertainen* juuri tai kaksi *ei-reaalista* juurta.

Katsotaan ensin tilanne, jossa KY:llä on kaksoisjuuri r_0:

$$r^2 + ar + b = (r - r_0)^2 = r^2 - 2r_0r + r_0^2.$$

Lasueen 3.11 nojalla saadaan yksi ratkaisu $y_1(x) = e^{r_0 x}$, mutta toinen jää vielä avoimeksi. Käytetään "kertaluvun pudotusta"(kuten esimerkissä 3.10, jossa yhtälön KY:llä on kaksikertainen juuri $r = 1$). Etsitään siis ratkaisua

$$y(x) = f(x)e^{r_0 x}, \quad f \neq 1$$

Derivoidaan tätä kahdesti

$$\begin{aligned} y_2'(x) &= \big(f'(x) + r_0 f(x)\big)e^{r_0 x} \\ y_2''(x) &= \big(f''(x) + 2r_0 f'(x) + r_0^2 f(x)\big)e^{r_0 x} \end{aligned}$$

ja yhdistetään

$$\begin{aligned} y_2''(x) + ay_2'(x) + by_2(x) &= e^{r_0 x}\Big(f''(x) + (2r_0 + a)f'(x) + (r_0^2 + ar_0 + b)f\Big) \\ &= e^{r_0 x}\big(f''(x) + (2r_0 - 2r_0)f'(x)\big) = e^{r_0 x} f''(x) = 0. \end{aligned}$$

Koska $e^{r_0 x} \neq 0$, niin $f''(x) = 0 \Longrightarrow f(x) = c_1 x + c_2$. Valitaan $c_1 = 1$ ja $c_2 = 0$, joten saadaan toiseksi ratkaisuksi $y_2(x) = xe^{r_0 x}$. Onko (y_1, y_2) perusjärjestelmä? Lasketaan Wronskin determinantti kohdassa $x = 0$

$$W(y_1, y_2)(0) = \begin{vmatrix} e^{r_0 \cdot 0} & 0 \cdot e^{r_0 \cdot 0} \\ r_0 e^{r_0 \cdot 0} & e^{r_0 \cdot 0} + 0 \cdot r_0 e^{r_0 \cdot 0} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ r_0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0,$$

joten $(e^{r_0 x}, xe^{r_0 x})$ on perusjärjestelmä. Eli olemme osoittaneet lauseen

Lause 3.15. *Jos r_0 on yhtälön $r^2 + ar + b = 0$ kaksoijuuri, niin yhtälöllä $y'' + ay' + b = 0$ on perusjärjestelmä $(e^{r_0 x}, xe^{r_0 x})$.*

Esimerkki 3.16. Ratkaistaan $y'' + 6y' + 9 = 0$. Nyt (KY) on $r^2 + 6r + 9 = (r + 3)^2$, joten $r = -3$ on kaksoisjuuri. Siis perusjärjestelmä on (e^{-3x}, xe^{-3x}).

Mitä tapahtuu, kun (KY):llä on ei-reaaliset juuret? Oletetaan, että yhtälön $r^2 + ar + b = 0$ juuret $r_1, r_2 \in \mathbb{C}$ eivät ole reaalisia. Jos Lausetta 3.11 soveltaa suoraan (välittämättä siitä, että juuret eivät ole reaalisia) havaittaisiin, että $e^{r_1 x}$ ja $e^{r_2 x}$ ovat ratkaisuja. Tarvitsemme tietoa kompleksianalyysistä: millainen on kompleksimuuttujan eksponenttifunktio e^z, kun $z \in \mathbb{C}$?

Sovelletaan suoraan ns. DeMoivren kaavaa (jota ei todisteta tässä):

$$e^z = e^{x+iy} = e^x e^{iy} = e^x(\cos y + i \sin y).$$

Siispä jos $r_1 = s_1 + it_1$, niin $e^{r_1 x} = e^{s_1 x}(\cos(t_1 x) + i \sin(t_1 x)$, joten jakamalla tämä reaali- ja imaginääriosiin saadaan kaksi ratkaisukandidaattia:

$$y_1(x) = e^{s_1 x} \cos(t_1 x), \quad y_2(x) = e^{s_2 x} \sin(t_2 x)$$

Nämä antavat myös yhtälön perusratkaisun tässä tapauksessa.

Lause 3.17. *Jos $r_0 = s + it$ ja $\overline{r_0} = s - it$ ovat reaalikertoimisen karakteristisen yhtälön $r^2 + ar + b = 0$ juuret ja $t \neq 0$, niin yhtälön $y'' + ay' + b = 0$ perusjärjestelmä on*

$$y_1(x) = e^{sx}\cos(tx), \quad y_2(x) = e^{sx}\sin(tx).$$

Todistus. Koska r_0 on yhtälön $r^2 + ar + b = 0$ juuri, niin

$$\begin{aligned} 0 &= r_0^2 + ar_0 + b = (s^2 - t^2 + 2ist) + a(s + it) + b \\ &= (s^2 - t^2 + as + b) + i(2st + at) \\ \Longrightarrow &\begin{cases} s^2 - t^2 + as + b = 0 \\ 2st + at = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Laskemalla suoraan

$$\begin{aligned} y_1'(x) &= e^{sx}(s\cos(tx) - t\sin(tx)) \\ y_1''(x) &= e^{sx}(s^2\cos(tx) - 2st\sin(tx) - t^2\cos(tx)) \end{aligned}$$

joten

$$y_1'' + ay_1' + by_1 = e^{sx}\Big(\cos(tx)(s^2 - t^2 + as + b) + \sin(tx)(-2st - at)\Big) = 0,$$

joten y_1 on ratkaisu. Vastaavasti laskemalla nähdään, että y_2 on ratkaisu. Lasketaan nyt Wronskin determinantti pisteessä $x = 0$:

$$W(y_1, y_2)(0) = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ s & t \end{vmatrix} = t \neq 0,$$

Siis (y_1, y_2) on perusjärjestelmä. □

Esimerkki 3.18. Hae yhtälön $y'' + 2y' + 4y = 0$ perusjärjestelmä. **Ratkaisu:** (KY):

$$r^2 + 2r + 4 = 0 \Longleftrightarrow r = \frac{-2 \pm \sqrt{4 - 16}}{2} = \frac{-2 \pm 2i\sqrt{3}}{2} = -1 \pm 2i\sqrt{3}.$$

Siis perusjärjestelmä on $y_1(x) = e^{-x}\cos(2\sqrt{3}x)$, $y_2(x) = e^{-x}\sin(2\sqrt{3}x)$.

3.4 Vakion variointi

”Vakion variointi”on klassinen menetelmä, jolla voidaan löytää jokin ratkaisu v epähomogeeniselle yhtälölle

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = g(x), \tag{3.11}$$

kun tunnetaan perusjärjestelmä (y_1, y_2) vastaavalle homogeeniselle yhtälölle

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0. \tag{3.12}$$

Huomautus 3.19. Jos v on jokin epähomogeenisen yhtälön (3.11) ratkaisu, niin kaikki muut ratkaisut voidaan esittää muodossa

$$y(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) + v(x);$$

tämä johtuu siitä, että $y - v$ toteuttaa homogeenisen yhtälön (3.12) ja on siis lineaariyhdiste perusjärjestelmästä (y_1, y_2).

Haetaan nyt ratkaisua v muodossa

$$v(x) = c_1(x) y_1(x) + c_2(x) y_2(x),$$

missä siis vakiot c_1 ja c_2 on korvattu funktiolla $c_1(x)$ ja $c_2(x)$. Tästä johtuu nimitys "vakion variointi". Lasketaan

$$v'(x) = \big(c_1'(x) y_1(x) + c_2'(x) y_2(x)\big) + \big(c_1(x) y_1'(x) + c_2(x) y_2'(x)\big).$$

Koska emme halua päätyä 2. kertaluvun differentiaaliyhtälöihin c_1:lle ja c_2:lle, niin oletetaan, että

$$c_1'(x) y_1(x) + c_2'(x) y_2(x) = 0. \tag{3.13}$$

Tällöin

$$v''(x) = \big(c_1'(x) y_1'(x) + c_2'(x) y_2'(x)\big) + \big(c_1(x) y_1''(x) + c_2(x) y_2''(x)\big)$$

Yhdistämällä ja vaatimalla $v'' + pv' + qv = g$ saadaan

$$\begin{aligned} g(x) &= c_1(x)\big(y_1'' + p(x) y_1'(x) + q(x)\big) + c_2(x)\big(y_2'' + p(x) y_2' + q(x)\big) \\ &\quad + \big(c_1'(x) y_1'(x) + c_2'(x) y_2'(x)\big) = c_1'(x) y_1'(x) + c_2'(x) y_2'(x) \end{aligned}$$

Yhdistämällä tämä yhtälön (3.13) saadaan seuraavanlainen yhtälösysteemi tuntemattomille funktioille c_1 ja c_2

$$\begin{cases} c_1'(x) y_1(x) + c_2'(x) y_2(x) = 0 \\ c_1'(x) y_1'(x) + c_2'(x) y_2'(x) = g(x). \end{cases} \tag{3.14}$$

Olemme siis osoittaneet, että jos c_1 ja c_2 ovat systeemin (3.14) ratkaisu, niin $y(x) = c_1(x) y_1(x) + c_2(x) y_2(x)$ on yhtälön (3.11) yksi ratkaisu. Ratkaistaan nyt yhtälösysteemi (3.14) pisteessä x. Tämä on lineaarinen yhtälöryhmä $(c_1'(x), c_2'(x))$:lle, joten se on ratkeava, sillä determinantti

$$\begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix} = W(y_1, y_2)(x) \neq 0$$

sillä (y_1, y_2) on perusjärjestelmä. Oletetaan, että $y_2(x) \neq 0$. Tällöin

$$c_2'(x) = -\frac{c_1'(x)y_1(x)}{y_2(x)},$$

joten

$$\begin{aligned}
&c_1'(x)y_1'(x) - y_2'(x)\frac{c_1'(x)y_1(x)}{y_2(x)} = g(x)\\
&\iff -c_1'(x)W(y_1,y_2)(x) = g(x)y_2(x)\\
&\implies c_1(x) = -\int^x \frac{g(x)y_2(x)}{W(y_1,y_2)(x)}dx\\
&\implies c_2'(x) = \frac{g(x)y_2(x)y_1(x)}{W(y_1,y_2)(x)y_2(x)} = \frac{g(x)y_1(x)}{W(y_1,y_2)(x)}\\
&\implies c_2(x) = \int^x \frac{g(x)y_1(x)}{W(y_1,y_2)(x)}dx
\end{aligned}$$

Esimerkki 3.20. Määrää yhtälön

$$y''(x) + y(x) = \tan x$$

yleinen ratkaisu. **Ratkaisu:** homogeeninen yhtälö on $y'' + y = 0$ jonka (KY) on $r^2 + 1 = 0 \iff r = \pm i$. Siis homogeenisen yhtälön perusjärjestelmä on $(\cos x, \sin x)$. Haetaan vakion varioinnilla epähomogeenisen yhtälön ratkaisua:

$$y(x) = c_1(x)\cos x + c_2(x)\sin x.$$

Nyt yhtälösysteemi (3.14) on muotoa

$$\begin{cases} c_1'(x)\cos x + c_2'(x)\sin x = 0\\ -c_1'(x)\sin x + c_2'(x)\cos x = \tan x. \end{cases}$$

Ratkaistaan tämä. Kun $x \neq n\pi$, $n \in \mathbb{Z}$, niin $\sin x \neq 0$ ja

$$\begin{aligned}
&c_2'(x) = -\cot x c_1'(x) \implies -c_1'(x)(\sin x + \cos x\cot x) = -\frac{c_1'(x)}{\sin x} = \tan x\\
&\iff c_1'(x) = -\sin x\tan x = \frac{-\sin^2 x}{\cos x} = \frac{\cos^2 x - 1}{\cos x} = \cos x - \frac{1}{\cos x}
\end{aligned}$$

Tästä saadaan integroimalla (integroimisvakio voidaan unohtaa, sillä ne on otettu huomioon jo homogeenisen yhtälön ratkaisussa)

$$c_2(x) = \int^x \tan x\,dx = \int^x \frac{\sin x}{\cos x}dx = -\ln|\cos x|$$

ja

$$c_1(x) = \int^x (\cos x - \frac{1}{\cos x})dx = \sin x - \ln\left|\frac{1+\sin x}{\cos x}\right|$$

Siis yleinen ratkaisu on on

$$y(x) = c_1 \cos x + c_2 \sin x + (\sin x - \ln\left|\frac{1+\sin x}{\cos x}\right|) \cos x - (\ln|\cos x|) \sin x.$$

Luku 4

Yleistä teoriaa

4.1 Lokaali olemassaolo- ja yksikäsitteisyyslause

Tarkastellaan nyt 1. kertaluvun alkuarvotehtävää

$$y' = f(x, y), \quad y(x_0) = y_0$$

Osoitetaan, että funktion f toteuttaessa tiettyjä säännöllisyysehtoja, tämä ongelma on aina yksikäsitteisesti ratkaistavissa jossain pisteen x_0 ympäristössä. Todistus tehtään käyttäen ns. *Picardin peräkkäisten approksimaatioiden menetelmää*. Tätä varten tarvitaan hieman aputuloksia.

Lemma 4.1. *Olkoon $I \subset \mathbb{R}$ väli, $u_n : I \to \mathbb{R}$, $n = 1, 2, \ldots$, sellainen jono funktioita, että*

$$|u_{n+1}(x) - u_n(x)| \leq a_n$$

jokaisella $x \in I$, missä jono (a_n) on summautuva eli $\sum a_n < \infty$. Tällöin jono (u_n) suppenee tasaisesti välillä I kohti funktiota

$$u(x) = u_1(x) + \sum_{n=1}^{\infty} \big(u_{n+1}(x) - u_n(x)\big), \quad x \in I$$

Todistus. Havaitaan, että jokaisella $n \geq 2$ on voimassa

$$u_n(x) = u_1(x) + \sum_{k=1}^{n-1} (u_{k+1}(x) - u_k(x)).$$

Nyt jokaisella $x \in I$ reaalilukujono $(u_n(x))$ on Cauchyn jono, sillä kun $m > n$, niin

$$|u_m(x) - u_n(x)| = \left| \sum_{k=n}^{m-1} u_{k+1}(x) - u_k(x) \right| \leq \sum_{k=n}^{m-1} |u_{k+1}(x) - u_k(x)| \leq \sum_{k=n}^{\infty} a_k$$

ja oikea puoli lähestyy nollaa, kun $n \to \infty$, sillä jono (a_n) on summautuva. Tästä seuraa, että jono $(u_n(x))$ suppenee kohti reaalilukua $u(x)$. Siispä

$$\begin{aligned} u(x) = \lim_{n\to\infty} u_n(x) &= u_1(x) + \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n-1} (u_{k+1}(x) - u_k(x)) \\ &= u_1(x) + \sum_{k=1}^{\infty} (u_{k+1}(x) - u_k(x)). \end{aligned}$$

Edelleen suppeneminen on tasaista, sillä

$$\sup_{x\in I} |u(x) - u_n(x)| \leq \sup_{x\in I} \sum_{k=n}^{\infty} a_k \to 0.$$

□

Määritelmä 4.2. Funktio h on *Lipschitz-jatkuva* (lyh. *Lip-jva*) välillä $I \subset \mathbb{R}$, jos on olemassa sellainen vakio $M > 0$, että kaikilla $x, y \in I$ on voimassa

$$|h(x) - h(y)| \leq M |x - y|.$$

Tasoalueessa $D \subset \mathbb{R}^2$ määritelty funktio on *tasaisesti Lipschitz-jatkuva toisen muuttujan suhteen*, jos on olemassa sellainen vakio $M > 0$, että

$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leq M |y_1 - y_2|$$

kaikilla $(x, y_i) \in D$.

Esimerkki 4.3.

- Jokainen rajoitetun välin I ympäristössä jatkuvasti derivoituva funktio φ on Lip-jva välillä I: oletetaan, $x, y \in I$ ja $x < y$. Nyt väliarvolauseen nojalla
$$|\varphi(x) - \varphi(y)| = |\varphi'(\xi)| |x - y|$$
jollakin välin pisteellä $\xi \in (x, y)$. Koska derivaatta on jatkuva, niin rajoitetulla välillä se pysyy rajoitettuna eli
$$|\varphi(x) - \varphi(y)| = |\varphi'(\xi)| |x - y| \leq \sup_{\xi\in I} |\varphi'(\xi)| |x - y| = M |x - y|.$$

- Funktio $\psi(x) = \sqrt{|x|}$ on jatkuva origossa, muttei Lip-jva missään origon ympäristössä: nyt
$$\psi(x) - \psi(0) = \sqrt{|x|} = \frac{|x|}{\sqrt{|x|}}.$$
Koska $|x|^{-1/2} \to \infty$, kun $x \to 0$, niin mitään $M > 0$ ei voida valita siten, että ψ toteuttaisi Lipschitz-ehdon.

Nyt voidaan todistaa seuraava tulos

Lause 4.4 (Lokaali OY-lause)**.** *Olkoon D tasoalue, $(x_0, y_0) \in D$ ja f alueessa D jatkuva ja toisen muuttujan suhteen tasaisesti Lip-jva D:ssä. Tällöin on olemassa sellainen $\delta > 0$, että alkuarvotehtävällä*

$$y'(x) = f(x, y(x)), \quad y(x_0) = y_0 \tag{4.1}$$

on yksikäsitteinen ratkaisu välillä $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$.

Todistus. Jaetaan todistus selvyyden vuoksi vaiheisiin.
Vaihe 1: Muunnos integraaliyhtälöksi:
Oletetaan, että välillä I määritelty funktio y on alkuarvotehtävän (4.1) ratkaisu, eli

$$y'(x) = f(x, y(x)), \quad y(x_0) = y_0 \text{ ja } (x, y(x)) \in D \text{ kaikilla } x \in I. \tag{4.2}$$

Tällöin integroimalla saadaan

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, y(t))dt, \quad x \in I. \tag{4.3}$$

Kääntäen, jos y toteuttaa integraaliyhtälön (4.3), niin derivoimalla x:n suhteen saadaan $y' = f(x, y(x))$, ja kun $x = x_0$, niin $y(x_0) = y_0$, joten alkuarvotehtävä (4.2) ja integraaliyhtälö (4.3) ovat yhtäpitävät. Ratkaisemmekin integraaliyhtälön (4.3) jollakin sopivalla välillä.
Vaihe 2: Iteraatio:
Olkoon

$$Q = \{ \ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \ |x - x_0| \leq h, |y - y_0| \leq k \ \}$$

suorakulmio. Koska D on alue ja $(x_0, y_0) \in D$, niin voidaan valita parametrit h ja k niin pieniksi, että $Q \subset D$. Valitaan nyt

$$\delta = \min\left\{h, \frac{k}{2\,\|f\|}\right\}, \quad \|f\| = \sup_{(x,y)\in Q} |f(x, y)|\,.$$

Tässä kohdassa oletetaan siis, että $f \not\equiv 0$. Tämä on kuitenkin triviaali tapaus, sillä tällöin $y' = 0$.

Olkoon $I = (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$. Määritellään rekursiivisesti

$$\begin{aligned}
y_0(x) &= y_0, \\
y_1(x) &= y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, y_0)dt, \\
y_2(x) &= y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, y_1(t))dt, \\
&\vdots \\
y_{n+1}(x) &= y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, y_n(t))dt, \\
&\vdots
\end{aligned}$$

Tässä iteraatiossa on pidettävä huolta siitä, että $(t, y_n(t)) \in D$, aina kun $t \in I$. Tämä voidaan osoittaa induktiolla: Oletetaan, että $x \geq x_0$ (tapaus $x < x_0$ menee vastaavasti). Nyt

$$|y_1(x) - y_0| \leq \int_{x_0}^{x} |f(t, y_0)|\, dt \leq \|f\|\, \delta \leq \frac{k}{2}$$

ja jos olemme osoittaneet jo, että $(t, y_n(t)) \in D$ kaikilla $t \in I$, niin

$$|y_{n+1}(x) - y_0| \leq \int_{x_0}^{x} |f(t, y_n(t))|\, dt \leq \|f\|\, \delta \leq \frac{k}{2}.$$

Siis aina kun $x \in I$, niin $y_{n+1}(x) \in (y_0 - k, y_0 + k)$ joten $(x, y_{n+1}(x)) \in Q \subset D$.
Vaihe 3: Jatkuvuus ja konvergenssi:
Lip-jvuusoletuksen nojalla on olemassa sellainen $M > 0$, että

$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leq M\, |y_1 - y_2|\,, \quad \text{kaikilla } (x, y_i) \in D$$

Osoitetaan induktiolla, että kaikilla $n \geq 0$ pätee

$$|y_{n+1}(x) - y_n(x)| \leq \frac{M^n\, \|f\|}{(n+1)!}\, |x - x_0|^{n+1}\,, \tag{4.4}$$

kun $x \in I$ ja että funktiot y_n ovat jatkuvia.

Funktion y_n jatkuvuus seuraa määritelmästä suoraan, sillä jos y_n on jatkuva, niin määritelmän nojalla y_{n+1} on tällöin jatkuvan funktion $t \mapsto f(t, y_n(t))$ integraalifunktiona jatkuva. Koska $y_0(t)$ on vakiofunktio, on se jatkuva, joten induktiolla saadaan kaikki funktiot y_n jatkuviksi.

Edelleen, kun $x \geq x_0$ (tapaus $x < x_0$ menee vastaavasti), niin

$$|y_1(x) - y_0(x)| \leq \int_{x_0}^{x} |f(t, y_0)|\, dt \leq \|f\|\, |x - x_0| = \frac{M^0\, \|f\|}{1!}\, |x - x_0|^{0+1}\,,$$

joten väite (4.4) on voimassa, kun $n = 0$. Oletetaan, että väite (4.4) pätee. Tällöin Lipschitz-estimaatin ja induktio-oletuksen nojalla

$$\begin{aligned}
|y_{n+2}(x) - y_{n+1}(x)| &= \left| \int_{x_0}^{x} f(t, y_{n+1}(t))dt - \int_{x_0}^{x} f(t, y_n(t))dt \right| \\
&\leq \int_{x_0}^{x} |f(t, y_{n+1}(t)) - f(t, y_n(t))|\, dt \overset{\text{Lip.est.}}{\leq} M \int_{x_0}^{x} |y_{n+1}(t) - y_n(t)|\, dt \\
&\overset{\text{ind.ol.}}{\leq} M \int_{x_0}^{x} \frac{\|f\| M^n}{(n+1)!} |t - x_0|^{n+1}\, dt = \frac{\|f\| M^{n+1}}{(n+2)!} |x - x_0|^{n+2}.
\end{aligned}$$

Siispä väite (4.4) arvolla $n + 1$ on myös voimassa, joten induktioperiaatteella se on voimassa kaikilla $n \geq 0$. Sovelletaan nyt lemmaa 4.1 kun

$$a_n = \frac{\|f\| M^{n-1} \delta^n}{n!}, \quad n = 1, 2, \ldots.$$

Ensiksi kaikilla $x \in I$ on siis voimassa

$$|y_{n+1}(x) - y_n(x)| \leq \frac{M^n \|f\|}{(n+1)!} |x - x_0|^{n+1} < \frac{M^n \|f\|}{(n+1)!} \delta^{n+1} = a_{n+1}$$

ja toisaalta

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\|f\| M^{n-1} \delta^n}{n!} = \frac{\|f\|}{M} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(M\delta)^n}{n!} = \frac{\|f\|}{M} e^{M\delta}.$$

Siis lemman 4.1 nojalla jono $(y_n(x))$ suppenee tasaisesti välillä I kohti rajafunktiota $y(x)$:

$$y(x) = y_0 + \sum_{n=0}^{\infty} (y_{n+1}(x) - y_n(x))$$

ja jatkuvien funktioiden y_n on tasaisena rajana myös y on jatkuva.

Vaihe 4: y toteuttaa yhtälön (4.3):

Osoitetaan, että kun $x \geq x_0$ (tapaus $x < x_0$ menee vastaavasti), niin

$$\lim_{n \to \infty} \int_{x_0}^{x} f(t, y_n(t))dt = \int_{x_0}^{x} f(t, y(t))dt.$$

Nyt Lipschitz-estimaatin ja tasaisen suppenemisen (edellinen vaihe) nojalla

$$\begin{aligned}
\left| \int_{x_0}^{x} f(t, y_n(t))dt - \int_{x_0}^{x} f(t, y(t))dt \right| &\leq \int_{x_0}^{x} |f(t, y_n(t)) - f(t, y(t))|\, dt \\
\overset{\text{Lip.est}}{\leq} \int_{x_0}^{x} M |y_n(t) - y(t)|\, dt &\leq M |x - x_0| \sup_{t \in \bar{I}} |y_n(t) - y(t)| \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} 0,
\end{aligned}$$

missä $\overline{I} = [x_0 - \delta, x_0 + \delta]$. Siis olemme osoittaneet (edellinen vaihe + äskeinen raja-arvo), että

$$y(x) = \lim_{n\to\infty} y_n(x) = \lim_{n\to\infty} \Big(y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, y_n(t))dt \Big) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, y(t))dt.$$

Vaihe 5: yksikäsitteisyys:
Tämä väite osoitetaan ns. ansalanka (bootstrap) argumentilla: oletetaan, että y ja w ovat kaksi $C^1(\overline{I})$ ratkaisua integraaliyhtälölle (4.3):

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, y(t))dt, \quad w(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, w(t))dt.$$

Tarkastellaan tapausta, kun $x \geq x_0$ (ja tapaus $x < x_0$ menee vastaavasti). Lipschitz-estimaatin avulla saadaan arvio

$$\begin{aligned}
|y(x) - w(x)| &= \left| \int_{x_0}^{x} \big(f(t, y(t)) - f(t, w(t)) \big) dt \right| \\
&\leq \int_{x_0}^{x} |f(t, y(t)) - f(t, w(t))| \, dt \overset{\text{Lip.}}{\leq} M \, |x_0 - x| \sup_{t \in I} |y(t) - w(t)| \\
&\leq M \, |x - x_0| \, 2k
\end{aligned}$$

Sovelletaan tätä arviota iteratiivisesti:

$$\begin{aligned}
|y(x) - w(x)| &\leq \int_{x_0}^{x} |f(t, y(t)) - f(t, w(t))| \, dt \overset{\text{Lip.}}{\leq} M \int_{x_0}^{x} |y(t) - w(t)| \, dt \\
&\leq 2kM^2 \int_{x_0}^{x} |t - x_0| \, dt = 2kM^2 \frac{|x - x_0|^2}{2}, \\
|y(x) - w(x)| &\leq M \int_{x_0}^{x} |y(t) - w(t)| \, dt \\
&\leq 2kM^3 \int_{x_0}^{x} \frac{|t - x_0|}{2} dt = 2kM^3 \frac{|x - x_0|^3}{3!}, \\
&\vdots \\
|y(x) - w(x)| &\leq \cdots \leq 2kM^n \frac{|x - x_0|^n}{n!} \xrightarrow{n\to\infty} 0.
\end{aligned}$$

Siis $y(x) = w(x)$ kaikilla $x \in I$, joten ratkaisu on yksikäsitteinen. $\square$

Milloin lokaali Lipschitz-ehto pätee funktiolle f? Seuraava lause antaa helposti tarkistettavan kriteerin:

Lause 4.5. *Oletetaan, että $\frac{\partial f}{\partial y}$ on olemassa ja rajoitettu kaikilla $(x, y) \in D$ ja D on konveksi joukko. Tällöin f on tasaisesti Lip-jva toisen muuttujan suhteen D:ssä.*

Todistus. Suoraan väliarvolauseen nojalla: kaikilla $(x, y_1), (x, y_2) \in D$ on voimassa

$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| = \left| \frac{\partial f}{\partial y}(x, \xi)(y_2 - y_1) \right| \leq M \, |y_1 - y_2| \, ,$$

missä ξ on jokin janalla $\big((x, y_1), (x, y_2)\big)$ oleva piste ja

$$M = \sup_{(x,y) \in D} \left| \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \right| < \infty.$$

$\square$

Katsotaan varoittavaa esimerkkiä.

Esimerkki 4.6. Tarkastellaan alkuarvotehtävää

$$\begin{cases} y' = y^{2/3} \\ y(0) = 0; \end{cases}$$

nyt $f(x, y) = y^{2/3}$. Tällä tehtävällä on ratkaisut $y \equiv 0$ ja $y(x) = \frac{1}{27}x^3$: jälkimmäinen saadaan separoimalla, kun $y \neq 0$

$$\frac{dy}{y^{2/3}} = dx \Longrightarrow x + C = \int^y \frac{dy}{y^{2/3}} = 3y^{1/3} \Longrightarrow y = \frac{1}{27}(x + C)^3.$$

Alkuehdosta saadaan $0 = y(0) = \frac{1}{27}C^3 \Longrightarrow C = 0$. Siis alkuarvotehtävällä onkin ainakin kaksi ratkaisua! (itse asiassa ratkaisuja on äärettömän monta)

Jokin oletuksista menee siis rikki. Funktio f on kyllä jatkuva origon ympäristössä, muttei Lip-jva;

$$|f(x, y) - f(x, 0)| = |y|^{2/3} = |y|^{-1/3} \, |y| \, ,$$

ja koska $|y|^{-1/3} \to \infty$, kun $y \to 0$, ei Lipschitz-ehto voi toteutua.

Havaitaan siis, että Lipschitz-estimaatti on oleellinen!

Luku 5

Systeemit

5.1 Miksi systeemejä?

Esimerkki 5.1. Tarkastellaan koetilannetta: Kolme jousta, joilla kaikilla on jousivakio $= k$, on kytketty toisiinsa ja ensimmäinen ja kolmas vielä seinään kahden kappaleen välityksellä, joilla massa $= m$; oletamme alustan kitkattomaksi.

Pidämme ensimmäisen kappaleen tasapainotilassa ja poikkeutamme toista oikealle (= systeemin alusta positiivinen suunta) lepotilasta matkan $\alpha > 0$ verran. Päästetään hetkellä $t = 0$ kappaleet irti. Jos $x_i(t)$ on kappaleen i poikkeama hetkellä $t > 0$, niin miten määräät $x_1(t)$:n ja $x_2(t)$:n.

Pieni päättely (Hooken laki + Newtonin toinen peruslaki) $\Longrightarrow$ x_1 ja x_2 toteuttavat *systeemin*

$$\begin{cases} mx_1'' + 2kx_1 - kx_2 = 0 \\ mx_2'' + 2kx_2 - kx_1 = 0 \end{cases}$$

alkuehdolla

$$\begin{cases} x_1(0) = 0, \quad x_1'(0) = 0 \\ x_2(0) = \alpha, \quad x_2'(0) = 0. \end{cases}$$

Seuraavalla esimerkillä on differentiaaliyhtälöiden teoriassa merkittävä asema.

Esimerkki 5.2. Korkeamman asteinen yhtälö voidaan aina palauttaa 1. kertaluvun yhtälösysteemiksi. Tarkastellaa esimerkiksi lineaarista 2. kertaluvun yhtälöä

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = g(x). \tag{5.1}$$

Merkitään $y_1(x) = y(x)$ ja $y_2(x) = y_1'(x)$. Siis yhtälö (5.1) voidaan kirjoittaa muodossa

$$y_2' + p(x)y_2 + q(x)y_1 = g(x)$$

ja lisäksi

$$y_1'(x) = y'(x) = y_2(x).$$

Voimme siis kirjoittaa yhtälön (5.1) matriisimuodossa

$$\begin{pmatrix} y_1'(x) \\ y_2'(x) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ q(x) & p(x) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1(x) \\ y_2(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ g(x) \end{pmatrix},$$

eli jos merkitsemmä

$$Y(x) = \begin{pmatrix} y_1(x) \\ y_2(x) \end{pmatrix}, \quad A(x) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ q(x) & p(x) \end{pmatrix}, \quad G(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ g(x) \end{pmatrix},$$

niin saamme yhtälön

$$Y'(x) + A(x)Y(x) = G(x). \tag{5.2}$$

Vaikka tämä on formaalisti samanlainen kuin 1. kertaluvun lineaarinen differentiaaliyhtälö (jollaisia osaamme ratkaista), niin hieman käsittely tulee skalaarisesta tilanteesta muuttumaan.

5.2 Skalaariyhtälön redusointi systeemiksi

Tästä nähtiin jo esimerkki johdannossa tapauksessa $n = 2$. Tarkastellaan nyt n:nnen asteen *standardimuotoista lineaarista skalaariyhtälöä*:

$$y^{(n)} + a_n(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_2(x)y' + a_1(x)y = b(x) \tag{5.3}$$

Redusoidaan tämä systeemiksi asettamalla

$$\begin{cases} y_1(x) = y(x) \\ y_2(x) = y_1'(x) \\ \vdots \\ y_n(x) = y_{n-1}'(x) \end{cases} \tag{5.4}$$

Tällöin yhtälöt (5.3) ja (5.4) saavat muodon

$$\begin{aligned} y_n' + a_n(x)y_n + \cdots + a_2(x)y_2 + a_1(x)y_1 &= b(x) \\ y_k = y_{k-1}', \quad k &= 2, 3, \ldots, n \end{aligned}$$

mikä on matriisimuodossa

$$\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \\ \vdots \\ y_{n-1}' \\ y_n' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & -1 \\ a_1(x) & a_2(x) & \dots & a_{n-1}(x) & a_n(x) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_{n-1} \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ b(x) \end{pmatrix}$$

joka on standardimuotoinen lineaarinen $n \times n$-systeemi. Katsotaan esimerikillä

Esimerkki 5.3. Tarkastellaan yhtälöä $y'' + q(x)y + k^2y = \sin x$. Tämä redusoidaan yhtälösysteemiksi asettamalla

$$\begin{cases} y_1(x) = y(x) \\ y_2(x) = y_1'(x), \end{cases}$$

jolloin saamme

$$\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ q(x) + k^2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \sin x \end{pmatrix}.$$

5.3 Epälineaariset autonomiset systeemit

Muotoa

$$\begin{cases} x'(t) = f(x(t), y(t)) \\ y'(t) = g(x(t), y(t)) \end{cases}, \quad t \in I \subset \mathbb{R} \tag{5.5}$$

olevaa 1. kertaluvun systeemiä sanotaan *autonomiseksi* (lyhennetään (AS)); tässä f ja g ovat jossain tasoalueessa D määriteltyjä reaaliarvoisia funktioita. Muuttujaa t voidaan ajatella aikana. Olennaista on, että funktiot f ja g *eivät riipu t:stä.*

Olkoon $(x(t), y(t))$ autonomisen systeemin (5.5) jokin ratkaisu välillä I. Tällöin pistejoukkoa $\{\ (x(t), y(t)) \mid t \in I\ \}$ sanotaan *radaksi.* Erillaisia ratoja on äärettömän monta riippuen alkuehdoista. Usein xy-avaruutta kutsutaan systeemin *faasiavaruudeksi.*

Esimerkki 5.4. Määrää autonomisen systeemin

$$\begin{cases} x'(t) = x(t) \\ y'(t) = 2y(t) \end{cases}$$

ratkaisut sekä vastaavat radat.
Ratkaisu: Suoraan ratkaisemalla (2 separoituvaa yhtälöä) saadaan

$$x(t) = c_1 e^t, \quad y(t) = c_2 e^{2t}, \quad c_1 = x(0), c_2 = y(0)$$

Vastaavat radat saadaan nyt helposti

$$y(t) = c_2 e^{2t} = c_2 \left(\frac{x(t)}{c_1} \right)^2 = \frac{c_2}{c_1^2} x(t)^2$$

eli radat ovat paraabeleja, joiden huippu on origossa. Tästä erityisesti nähdään, että $|y(t)| \to \infty$, kun $|t| \to \infty$ (ellei $c_2 = 0$)

Useimmiten edellisellä tavalla *ei voi* toimia. Suoranainen ratkaisu voi olla mahdotonta, mutta ratojen määrääminen saattaa silti onnistua. Tärkeä autonisten systeemi on seuraava:

Lause 5.5. *Systeemi* (5.5) *on* translaatio-invariantti ajan suhteen*, eli jos pari* $(x(t), y(t))$ *on jokin ratkaisu välillä* I *ja jokaisella* $\alpha \in \mathbb{R}$ *asetetaan*

$$x_\alpha(t) := x(t+\alpha), \quad y_\alpha(t) = y(t+\alpha), \quad t \in I - \alpha,$$

niin $(x_\alpha(t), y_\alpha(t))$ *on myös systeemin* (5.5) *ratkaisu välillä* $I - \alpha$.

Todistus. Suoraan ketjusäännöllä saadaan

$$\begin{cases} x'_\alpha(t) = x'(t+\alpha) = f(x(t+\alpha), y(t+\alpha)) = f(x_\alpha(t), y_\alpha(t)) \\ y'_\alpha(t) = y'(t+\alpha) = g(x(t+\alpha), y(t+\alpha)) = g(x_\alpha(t), y_\alpha(t)), \end{cases}$$

mikä osoittaa väitteen. □

Tarvitaan vielä lisäkäsitteitä:

Määritelmä 5.6. Piste (x_0, y_0) on automisen systeemin (5.5) *kriittinen piste*, jos $f(x_0, y_0) = g(x_0, y_0) = 0$. Kaikkien kriittisten pisteiden joukko on (AS):n *kriittinen joukko*. Jos (x_0, y_0) on kriittinen piste, niin vakiofunktiopari

$$x(t) \equiv x_0, \quad y(t) \equiv y_0$$

on aina (AS):n ratkaisu, eli ns. *tasapainotila*.

Yleensä päämääränä on kuvata autonomisen systeemin käytöstä, kun $t \to \pm\infty$ ja ymmärtää systeemin käytös tasapainotiloissa!

Esimerkki 5.7. Tarkastellaa autonomista systeemiä

$$\begin{cases} x'(t) = -y(y-2) \\ y'(t) = (x-2)(y-2). \end{cases}$$

Systeemin kriittiset pisteet ovat

$$\begin{cases} y(y-2) = 0 \iff y = 0 \vee y = 2 \\ (x-2)(y-2) = 0 \iff x = 2 \vee y = 2 \end{cases} \iff y = 2 \vee (x,y) = (2,0)$$

Yhtälösysteemin ratkaisu on hankalaa, mutta ratakäytöksen määrääminen onnistuu ilmankin.

Differentiaali- ja integraalilaskennan I.1 kurssilla on osoitettu seuraavaa:

> Kun $x'(t_0) \neq 0$, niin ainakin pisteen t_0 pienessä ympäristössä funktio $x(t)$ on injektio. Siis käänteisfunktio $h(s) = x^{-1}(s)$ on olemassa pisteen $x(t_0)$ ympäristössä.

Tämän avulla t voidaan eliminoida, sillä ketjusäännöllä

$$t = h \circ x(t) \Longrightarrow 1 = h'(x(t))x'(t) \iff h'(x(t)) = \frac{1}{x'(t)}.$$

Määrittelemällä $z(s) := y \circ h(s)$ saadaan, $z'(s) = y'(h(s))h'(s)$, joten kun $s = x(t)$, niin

$$\begin{aligned} z'(x(t)) = y'\big(h(x(t))\big)h'(x(t)) &= \frac{y'(t)}{x'(t)} = \frac{(x(t)-2)(y(t)-2)}{-y(t)(y(t)-2)} \\ = -\frac{x(t)-2}{y(t)} &= -\frac{x(t)-2}{y(h \circ x)(t)} = -\frac{x(t)-2}{z\big(x(t)\big)}. \end{aligned}$$

Siis tämä ajan eliminointi johtaa differentiaaliyhtälöön z:lle, kun $x = x(t)$;

$$z'(x) = -\frac{x-2}{z}.$$

Formaalisti asia voidaan johtaa helpommin: ketjusäännöllä

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt}\frac{dt}{dx} = \frac{dy}{dt}\Big(\frac{dx}{dt}\Big)^{-1} = \frac{y'(t)}{x'(t)} = \frac{(x-2)(y-2)}{-y(y-2)} = -\frac{x-2}{y}.$$

Saatu differentiaaliyhtälö on separoituva, joten

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} = -\frac{x-2}{y} \iff ydy = -(x-2)dx \Longrightarrow \int^y ydy = -\int^x (x-2)dx \\ \iff \frac{y}{2} = -\frac{(x-2)^2}{2} + c_1 \iff y^2 + (x-2)^2 = c_2, \quad c_2 = 2c_1 \end{aligned}$$

Tällä on ratkaisuja vain kun $c_2 \geq 0$ ja nämä ratkaisut ovat $(2,0)$-keskisiä $\sqrt{c_2}$-säteisiä ympyröitä. Nämä ympyrät ovat siis systeemin ratoja. On huomattava, että emme kuitenkaan ratkaisseet funktioita $x(t)$ ja $y(t)$.

Tarkastellaan nyt toista kysymystä: kuinka $(x(t), y(t))$ käyttäytyy, kun $t \to \infty$. Oletetaan, että $c_2 = 9$. Tällöin rata leikkaa suoran $y = 2$ kun,

$$(x-2)^2 + 4 = 9 \iff |x-2| = \sqrt{5} \iff x = 2 \pm \sqrt{5}.$$

Yhtälöstä

$$x'(t) = -y(y-2)$$

voidaan päätellä, että kun $y > 2$, niin $x'(t) < 0$, joten $x(t)$ on aidosti vähenevä. Siis piste $(x(t), y(t)$ lähestyy pistettä $(2-\sqrt{5}, 2)$. Toisaalta kun $y < 2$, niin vastaavasti voidaan päätellä, että $(x(t), y(t))$ lähestyy myös pistettä $(2-\sqrt{5}, 2)$. Kummassakin tapauksessa siis systeemin tila lähestyy kriittistä pistettä.

Jos taas $c_2 < 4$, niin rata ei leikkaa kriittistä suoraa $y = 2$ ollenkaan. Nyt voidaan päätellä, että ratkaisut eivät lähesty mitään raja-arvoa (itse asiassa voidaan päätellä, että ratkaisut ovat tällöin periodisia, mutta jätämme tämän todistamatta).

Määritelmä 5.8. Jos autonomisen systeemin (5.5) ratkaisukäyrät saadaan funktion F tasa-arvokäyristä, eli muodossa

$$F(x,y) = C,$$

niin ne ovat *integraalikäyriä* ja funktio F on (AS):n *1. integraali.*

Usein funktio F vastaa (AS):n määräämän systeemin energiaa ja kun (AS) on konservatiivinen eli energian säilyttävä, niin edellinen määritelmä sanoo vain, että liike tapahtuu pitkin tasaenergiakäyriä.

Palataan nyt takaisin esimerkkiin 5.7. Siinä näimme, että jos ratkaisujen parilla $(x(t), y(t))$ oli raja-arvo, kun $t \to \infty$, niin tämä raja-arvo kuului kriittiseen joukkoon. Tämä on aina totta, kuten seuraavaksi osoitamme:

Lause 5.9. *Olkoon $(x(t), y(t))$ autonomisen systeemin (5.5) ratkaisu välillä $[0,\infty)$ ja oletetaan, että f ja g ovat jatkuvia. Jos on olemassa raja-arvo*

$$x_0 = \lim_{t\to\infty} x(t), \quad y_0 = \lim_{t\to\infty} y(t),$$

niin (x_0, y_0) on kriittinen piste.

Todistus. On osoitettava, että $f(x_0, y_0) = g(x_0, y_0) = 0$. Havaitaan ensin, että oletuksesta f, g jatkuvia seuraa

$$\lim_{t\to\infty} x'(t) = \lim_{t\to\infty} f(x(t), y(t)) = f(x_0, y_0)$$
$$\lim_{t\to\infty} y'(t) = \lim_{t\to\infty} g(x(t), y(t)) = g(x_0, y_0).$$

Tehdään nyt vastaoletus: Oletetaan, että (x_0, y_0) ei ole kriittinen piste. Siis joko $f(x_0, y_0) \neq 0$ tai $g(x_0, y_0) \neq 0$. Oletetaan, että

$$w := f(x_0, y_0) > 0.$$

(Täsmälleen samanlaisella päättelyllä voidaan muut 3 mahdollisuutta osoittaa). Koska f on jatkuva, niin jokaista $\varepsilon > 0$ kohti löytyy sellainen $N > 0$, että

$$|f(x_0, y_0) - f(x(t), y(t))| < \varepsilon \quad \text{aina kun } t \geq N$$

Valitaan $\varepsilon = w/2 > 0$: siis löytyy sellainen $N > 0$, että

$$|w - f(x(t), y(t))| < w/2 \quad \text{aina kun } t \geq N.$$

Siis $w/2 < f(x(t), y(t)) = x'(t)$ kaikilla $t \geq N$. Integroimalla saadaan siis, että

$$x(t) \geq \frac{tw}{2} + c,$$

kun $t \geq N$. Mutta tästä seuraa, että $x(t) \to \infty$, kun $t \to \infty$, mikä on ristiriidassa oletuksen kanssa. Voidaan siis päätellä, että vastaoletuksen täytyy olla väärä ja siis (x_0, y_0) on kriittinen piste. $\square$

Luku 6

Lineaariset 1. kertaluvun systeemit

6.1 Matriisi-kertaus

- Reaalinen $m \times n$ -matriisi (merkitään $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$) on

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} = (a_{ij}), \quad a_{ij} \in \mathbb{R}$$

- Jos A, $B \in \mathbb{R}^{m\times n}$, niin $A + B = (a_{ij} + b_{ij})$. Jos $\lambda \in \mathbb{R}$, niin $\lambda A = (\lambda a_{ij})$. Kaikki normaalit laskulait pätevät matriisien yhteenlaskulle ja skalaarilla kertomiseele.

- *Kertolasku*: Jos $A \in \mathbb{R}^{m\times k}$ ja $B \in \mathbb{R}^{k\times n}$, niin tulo $AB \in \mathbb{R}^{m\times n}$ on määritelty ja tulon AB kohdassa (ij) oleva alkio on

$$(AB)_{ij} = \sum_{l=1}^{k} a_{il} b_{lj}$$

- Edelleen (kun seuraavat tulot on määritelty)

$$A(B + C) = AB + AC, \quad (B + C)A = BA + CA,$$
$$A(BC) = (AB)C, \quad \lambda AB = (\lambda A)B = A(\lambda B)$$

  Vektorit $x \in \mathbb{R}^n$ voidaan samaistaa $n \times 1$-matriisin kanssa, jolloin jos $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ ja $x \in \mathbb{R}^n$, niin $Ax \in \mathbb{R}^{n\times 1} \approx \mathbb{R}^n$ ja

$$(Ax)_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j$$

- yleesä $AB \neq BA$, esim.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, AB = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, BA = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix},$$

- Kertolaskun ykkösalkio $n \times n$-matriiseille on *identtinen matriisi*

$$I = I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

- Yleisemmin $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ on n-neliömatriisi

- Neliömatriisi B on neliömatriisin A *käänteismatriisi*, jos

$$AB = BA = I.$$

  Tällöin sanomme, että A on kääntyvä ja $B = A^{-1}$.

6.2 Peruskäsitteitä

Olkoon $x(t) = \big(x_1(t), \dots, x_n(t)\big)^T \in \mathbb{R}^{n \times 1} \approx \mathbb{R}^n$ pystyvektori, jonka muodostaa n välillä I määriteltyjä funktiota x_j. Jatkossa vapaa muuttuja on aina t. Jos $A(t)$ on $n \times n$-*matriisifunktio*,

$$I \ni t \mapsto A(t) = \big(a_{ij}(t)\big) \in \mathbb{R}^{n \times n},$$

niin *normaalimuodossa* $n \times n$-systeemi on

$$x'(t) = A(t)x(t) + f(t), \quad t \in I. \tag{6.1}$$

Systeemin (6.1) alkuehto on

$$x(t_0) = \big(x_{0,1}, \dots, x_{0,n}\big)^T, \quad x_{0,j} \in \mathbb{R}, \tag{6.2}$$

ja yhdessä (6.1) ja (6.2) muodostava normaalimuotoisen alkuarvotehtävän.

Perus OY-lause on seuraava, jonka todistusta emme ehdi käsitellä (mutta lauseen todistuksen päättely on hyvin samankaltainen kuin aiemmassa OY-lauseessa).

Lause 6.1. *Oletetaan, että A ja f ovat jatkuvia välillä I ($A(t) = (a_{ij}(t))$ on jatkuva, jos jokainen matriisialkio $a_{ij}(t)$ on jatkuva) ja olkoon $t_0 \in I$. Tällöin jokaisella $x_0 = (x_{0,1}, \dots, x_{0,n})^T \in \mathbb{R}^n$ alkuarvotehtävällä* (6.1)-(6.2) *on yksikäsitteinen ratkaisu koko välillä I.*

Seurauslause 6.2. *Jos funktiot $a_i(t)$, $i = 1, \ldots, n$ ja $b(t)$ ovat jatkuvia välillä I, niin alkuarvotehtävällä*

$$\begin{cases} y^{(n)} + a_n(t)y^{(n-1)} + \ldots a_1(t)y = b(t), \\ y^{(n-1)}(t_0) = \lambda_{n-1}, \ldots, y(t_0) = \lambda_0 \end{cases}$$

on yksikäsitteinen ratkaisu koko välillä I.

Todistus. Palautetaan yhtälö ensimmäisen kertaluvun systeemiin, jolloin olemassaolo ja -yksikäsitteisyyslause systeemeille (eli Lause 6.1) antaa ratkaisun, joka on yksikäsitteinen. □

Tällä 1. kertaluvun systeemillä on seuraava ominaisuus (lineaarisuus)

- jos $x_i'(t) = A(t)x_i(t) + f_i(t)$, $i = 1, \ldots, k$, niin summalle $x(t) = x_1(t) + \cdots + x_k(t)$ pätee

$$x(t) = A(t)x(t) + f(t), \quad f(t) = f_1(t) + \cdots + f_k(t).$$

- jos $x'(t) = A(t)x(t)+f(t)$, niin $(\lambda x)'(t) = \lambda A(t)x(t)+\lambda f(t)$, kun $\lambda \in \mathbb{R}$.
- jos $x_i'(t) = A(t)x_i(t) + f(t)$, $i = 1, 2$, niin erotus $x(t) := x_1(t) - x_2(t)$ toteuttaa homogeenisen yhtälön

$$x'(t) = A(t)x(t).$$

Edetään kuten skalaariyhtälön tapauksessa ja asetataan määritelmä:

Määritelmä 6.3. Perhe $(x_1(t), \ldots, x_n(t))$ vektorifunktioita on homogeenisen systeemin (HY)

$$x'(t) = A(t)x(t), \quad t \in I \tag{6.3}$$

perusjärjestelmä, jos $x_j(t)$ on (HY):n ratkaisu kaikilla $j = 1, \ldots, n$ ja jokainen (HY):n ratkaisu $x(t)$ voidaan kirjoittaa muodossa

$$x(t) = c_1x_1(t) + \ldots c_nx_n(t), \quad c_i \in \mathbb{R}, i = 1, \ldots, n$$

Nyt OY-lause (6.1) sanoo, että jos mielivaltaisessa välin pisteessä $t_0 \in I$ annetaan alkuarvot

$$x(t_0) = x_0 = (x_{0,1}, \ldots, x_{0,n})^T \in \mathbb{R}^n,$$

niin ratkaisu määräytyy täysin. Olkoon siis $x(t)$ jokin (HY):n ratkaisu ja $(x_1(t), \ldots x_n(t))$ annettu perhe (HY):n ratkaisuja. Ajatellaan nyt perhettä

$(x_1(t), \dots, x_n(t))$ perusjärjestelmän kandidaattina. Kysymys kuuluukin, milloin voimme valita sellaiset vakiot $c_1, \dots c_n \in \mathbb{R}$, että pisteessä $t_0 \in I$ pätee

$$x(t_0) = c_1 x_1(t_0) + \cdots + c_n x_n(t_0)? \tag{6.4}$$

Koska jokainen funktio yhtälössä (6.4) on vektorifunktio, niin yhtälö on itse asiassa lineaarinen $n \times n$ -yhtälösysteemi tuntemattomille vakioille $c_1, \dots, c_n$. Kirjoitetaan edellinen yhtälö (6.4) matriisimuodossa: Olkoon

$$X(t) := (x_1(t), \dots, x_n(t)) = \begin{pmatrix} x_{1,1}(t) & x_{1,2}(t) & \dots & x_{1,n}(t) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_{n,1}(t) & x_{n,2}(t) & \dots & x_{n,n}(t) \end{pmatrix}$$

Tällöin yhtälö (6.4) voidaan kirjoittaa muodossa

$$x(t_0) = X(t_0)C, \quad \text{kun } C = \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}.$$

ja tällä on *yksikäsitteinen* ratkaisu, jos ja vain jos

$$\det X(t_0) = \begin{vmatrix} x_{1,1}(t_0) & \dots & x_{1,n}(t_0) \\ \vdots & & \vdots \\ x_{n,1}(t_0) & \dots & x_{n,n}(t_0) \end{vmatrix} \neq 0.$$

Tätä determinattia nimitetään Wronskin determinantiksi.

Määritelmä 6.4. Yhtälön (HY) ratkaisujen $x_i(t) = \big(x_{1,i}(t), \dots, x_{n,j}(t)\big)^T$, $i = 1, \dots, n$, *Wronskin determinantti* pisteessä $t \in I$ on

$$W(x_1, \dots, x_n)(t) = \begin{vmatrix} x_{1,1}(t) & \dots & x_{1,n}(t) \\ \vdots & & \vdots \\ x_{n,1}(t) & \dots & x_{n,n}(t) \end{vmatrix}$$

Huomautus 6.5. Tämä on erinäköinen Wronskin determinantti kuin aikaisemmin 2. kertaluvun skalaariyhtälölle

$$x''(t) + a_1(t)x'(t) + a_2(t)x(t) = 0 \tag{6.5}$$

määritelty Wronskin determinantti. Kyseessä on kuitenkin sama asia toisella tavalla kirjoitettuna: Olkoon (x_1, x_2) yhtälön (6.5) ratkaisupari. Sille siis

$$W(x_1, x_2)(t) = \begin{vmatrix} x_1(t) & x_2(t) \\ x_1'(t) & x_2'(t) \end{vmatrix}.$$

Muunnetaan nyt yhtälö (6.5) ensimmäisen kertaluvun systeemiksi:

$$\begin{cases} y_1(t) = x(t), \\ y_2(t) = x'(t) = y_1'(t) \end{cases}, \quad Y(t) = \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix},$$

jolloin yhtälö (6.5) palautuu 1. kertaluvun yhtälösysteemiksi

$$Y'(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -a_2(t) & -a_1(t) \end{pmatrix} Y(t). \tag{6.6}$$

Jos nyt $(Y_1(t), Y_2(t))$ ovat yhtälösysteemin (6.6) ratkaisuvektoripari,

$$Y_1(t) = \begin{pmatrix} y_{1,1}(t) \\ y_{2,1}(t) \end{pmatrix}, \quad Y_2(t) = \begin{pmatrix} y_{1,2}(t) \\ y_{2,2}(t) \end{pmatrix},$$

jotka saadaan ratkaisuista x_1 ja x_2 seuraavasti:

$$\begin{cases} y_{1,1} = x_1 \\ y_{2,1} = x_1' \end{cases} \qquad \begin{cases} y_{1,2} = x_2 \\ y_{2,2} = x_2' \end{cases}$$

Nyt saamme

$$W(x_1, x_2)(t) = \begin{vmatrix} x_1(t) & x_2(t) \\ x_1'(t) & x_2'(t) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} y_{1,1}(t) & y_{1,2}(t) \\ y_{2,1}(t) & y_{2,2}(t) \end{vmatrix} = W(Y_1, Y_2)(t).$$

Siispä käsitteet ovat samat, vain erinäköiset.

Palataan nyt Wronskin determinantin ominaisuuksiin. Kuten aikaisemminkin, Wronskin determinantti määrää, milloin perhe (HY):n ratkaisuja muodostaa perusjärjestelmän.

Lause 6.6. *Perhe $(x_1, \ldots, x_n)$ on matriisiyhtälö (HY) perusjärjestelmä välillä I jos ja vain jos jollain $t_0 \in I$ pätee*

$$W(x_1, \ldots, x_n)(t_0) \neq 0$$

Todistus. Olkoon $x(t)$ mielivaltainen (HY):n ratkaisu ja oletetaan ensin, että Wronskin determinantti $W(x_1, \ldots, x_n)(t_0) \neq 0$. Tällöin päättelyn, jonka teimme ennen Wronskin determinantin määritelmää, nojalla on olemassa sellaiset vakiot $c_1, \ldots, c_n$ että

$$x(t_0) = c_1 x_1(t_0) + \ldots c_n x_n(t_0). \tag{6.7}$$

Toisaalta yhtälön (6.7) molemmilla puolilla olevat funktiot $x(t)$ ja $c_1x_1(t) + \ldots c_nx_n(t_0)$ ovat (HY):n ratkaisuja ja ovat yhtälön (6.7) nojalla saman alkuarvotehtävän ratkaisuja. Nyt OY-lauseen nojalla ratkaisut ovat samat, joten $x(t) = c_1x_1(t) + \cdots + c_nx_n(t)$ kaikilla $t \in I$. Siispä $(x_1, \ldots, x_n)$ on perusjärjestelmä.

Oletetaan nyt kääntäen, että $(x_1, \ldots, x_n)$ on perusjärjestelmä. Olkoon

$$X(t) = \begin{pmatrix} x_{1,1}(t) & \ldots & x_{1,n}(t) \\ \vdots & & \vdots \\ x_{n,1}(t) & \ldots & x_{n,n}(t) \end{pmatrix}$$

Koska $(x_1, \ldots, x_n)$ on perusjärjestelmä, niin jokaista $t_0 \in I$ ja jokaista $x_0 \in \mathbb{R}^n$ kohti on olemassa sellaiset vakiot $c_1, \ldots, c_n$, että

$$X(t_0)C = x_0, \quad C = (c_1, \ldots, c_n)^T \in \mathbb{R}^n.$$

Toisin sanoen $X(t_0)$ on surjektio. Lineaarialgebran perustuloksen nojalla tästä seuraa, että $X(t_0)$ on myös injektio, joten se on kääntyvä. Siispä saadaan, että $W(x_1, \ldots, x_n)(t_0) = \det X(t_0) \neq 0$. $\square$

Esimerkki 6.7. Osoita, että vektorifunktiot

$$x_1(t) = \begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \quad x_2(t) = \begin{pmatrix} -e^{-t} \\ 0 \\ e^{-t} \end{pmatrix}, \quad x_3(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ e^{-t} \\ -e^{-t} \end{pmatrix}$$

muodostavat systeemin

$$x'(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} x(t)$$

perusjärjestelmän.

Osoitus: Tarkastetaan ensin, että x_1, x_2 ja x_3 ovat ratkaisuja. Osoitetaan vain esimerkiksi, että x_2 on ratkaisu (muut menevät vastaavasti)

$$x_2'(t) = \begin{pmatrix} e^{-t} \\ 0 \\ -e^{-t} \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -e^{-t} \\ 0 \\ e^{-t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{-t} \\ 0 \\ -e^{-t} \end{pmatrix} = x_2'(t)$$

Siis x_2 on ratkaisu. Muut ovat myös (tarkista!). Nyt

$$\begin{aligned} W(x_1, x_2, x_3)(t) &= \begin{vmatrix} e^{2t} & -e^{-t} & 0 \\ e^{2t} & 0 & e^{-t} \\ e^{2t} & e^{-t} & -e^{-t} \end{vmatrix} = e^{2t} \begin{vmatrix} 0 & e^{-t} \\ e^{-t} & -e^{-t} \end{vmatrix} + e^{-t} \begin{vmatrix} e^{2t} & e^{-t} \\ e^{2t} & -e^{-t} \end{vmatrix} \\ &= -e^{2t}e^{-2t} + e^{-t}(-e^{t} - e^{t}) = -1 - 2 = -3 \neq 0. \end{aligned}$$

Siis (x_1, x_2, x_3) on perusjärjestelmä.

6.3 Vakiokertoimiset systeemit

Perusjärjestelmän löytäminen on yleensä vaikeaa; kuitenkin silloin, kun kerroinmatriisi A *ei* riipu t:stä, asia on varsin helppo. Tähän tarvitaan hieman tietoja matriisien ominaisarvoista ja -vektoreista.

- Jos $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, niin $\lambda \in \mathbb{R}$ on matriisin A *ominaisarvo*, jos on olemassa sellainen $u \in \mathbb{R}^n$, $u \neq 0$, että

  $$Au - \lambda u = 0.$$

  Jokainen $u \in \mathbb{R}^n$, joka ratkaisee edellisen yhtälön on ominaisarvoa λ *vastaava ominaisvektori*; näiden virittämä $\mathbb{R}^n$:n lineaarinen aliavaruus on ominaisarvoa λ vastaava *ominaisavaruus*

- Seuraavat ovat yhtäpitäviä väitteitä:
  - λ on A:n ominaisarvo
  - matriisi $A - \lambda I$ ei ole kääntyvä
  - determinantti $\det(A - \lambda I) = 0$.

Determinanttiehto antaa tavan määrätä ominaisarvot ja -vektorit.

Esimerkki 6.8. Olkoon

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}, \quad \Longrightarrow A - \lambda I = \begin{pmatrix} 2-\lambda & -3 \\ 1 & -2-\lambda \end{pmatrix},$$

$$\Longrightarrow \det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & -3 \\ 1 & -2-\lambda \end{vmatrix} = -(4 - \lambda^2) + 3 = \lambda^2 - 1 = 0$$

$$\Longleftrightarrow \lambda = \pm 1$$

Ominaisvektorit: Olkoon $\lambda = 1$. Tällöin

$$(A - I)u = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1 - 3u_2 \\ u_1 - 3u_2 \end{pmatrix} = 0$$

$$\Longrightarrow u_1 - 3u_2 = 0$$

Siis $\lambda = 1$ vastaava ominaisavaruus on suora $\{u_1 = 3u_2\}$. Olkoon nyt $\lambda = -1$. Vastaavasti

$$(A + I)u = \begin{pmatrix} 3 & -3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3u_1 - 3u_2 \\ u_1 - u_2 \end{pmatrix} = 0$$

$$\Longrightarrow u_1 - u_2 = 0$$

Siis $\lambda = -1$ vastaava ominaisavaruus on suora $\{u_1 = u_2\}$.

Huomautus 6.9. Lineaarialgebrasta tiedetään, että $n \times n$-matriisilla on aina n kompleksista ominaisarvoa (osa voi olla useampikertaisia): nämä ovat n:nnen asteen polynomiyhtälön $\det(A - \lambda I) = 0$ juuret.

Kuinka tämä liittyy 1. kertaluvun differentiaaliyhtälösysteemeihin? Tarkastellaan systeemiä

$$x'(t) = Ax(t).$$

Etsitään ratkaisua $x(t) = e^{rt}u$, missä $u \in \mathbb{R}^n$, $u \neq 0$, vakiovektori. Tällöin

$$\begin{aligned} &x'(t) = re^{rt}u, \quad Ax(t) = e^{rt}Au \\ &\Longrightarrow re^{rt}u = e^{rt}Au \Longleftrightarrow Au = ru \end{aligned}$$

Siis r on A:n ominaisarvo ja u vastaava ominaisvektori. Tällä tavalla saadaan itse asiassa kaikki yhtälösysteemin ratkaisut.

Lause 6.10. *Oletetaan, että $(r_1, \ldots, r_n)$ ovat matriisin A ominaisarvot ja ne ovat reaalisia. Jos $(u_1, \ldots, u_n)$ niitä vastaavat ominaisvektorit, jotka ovat* lineaarisesti riippumattomia*, niin*

$$(e^{r_1 t}u_1, \ldots, e^{r_n t}u_n)$$

on yhtälösysteemin $x'(t) = Ax(t)$ perusjärjestelmä.

Todistus. Olemme jo nähneet, että funktiot $e^{r_j t}u_j$, $j = 1, \ldots, n$, ovat yhtälösysteemin ratkaisuja. Toisaalta Wronskin determinantti

$$\begin{aligned} W(e^{r_1 t}u_1, \ldots, e^{r_n t}u_n)(t) &= \begin{vmatrix} e^{r_1 t}u_{1,1} & \ldots & e^{r_n t}u_{1,n} \\ \vdots & & \vdots \\ e^{r_1 t}u_{n,1} & \ldots & e^{r_n t}u_{n,n} \end{vmatrix} \\ &= e^{(r_1 + \cdots + r_n)t} \begin{vmatrix} u_{1,1} & \ldots & u_{1,n} \\ \vdots & & \vdots \\ u_{n,1} & \ldots & u_{n,n} \end{vmatrix} \neq 0, \end{aligned}$$

sillä $e^{(r_1 + \cdots + r_n)t} \neq 0$ aina ja vektorit $(u_1, \ldots, u_n)$ ovat lineaarisesti riippumattomia. □

Esimerkki 6.11. Esimerkin 6.8 matriisia vastaavan systeemin perusjärjestelmä on siis

$$\left\{ e^t \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}, e^{-t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Edellisen lauseen lisäehto on myös voimassa, sillä vektorit

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ ja } \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

ovat lineaarisesti riippumattomia.

Ongelmana edellisen lauseen soveltamisessa on varmistua, että ominaisvektorit $(u_1, \ldots, u_n)$ ovat lineaarisesti riippumattomia. Tämä voidaan perustella esimerkiksi seuraavassa tilanteessa (joka kattaa edellisen esimerkin tilanteen)

Lause 6.12. *Jos ominaisarvot $r_1, \ldots, r_n$ ovat erillisiä, niin niitä vastaavat ominaisvektorit ovat lineaarisesti riippumattomia.*

Todistus. Todistettu lineaarialgebran kurssilla. □

Katsotaan esimerkkiä:

Esimerkki 6.13. Tarkastellaan systeemiä

$$x'(t) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 4 & -4 & 5 \end{pmatrix} x(t) =: Ax(t).$$

Määräteen matriisin A ominaisarvot:

$$\begin{aligned} \det\,(A - \lambda I) &= \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 & -1 \\ 1 & -\lambda & 1 \\ 4 & -4 & 5-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)\begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ -4 & 5-\lambda \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 5-\lambda \end{vmatrix} \\ &- \begin{vmatrix} 1 & -\lambda \\ 4 & -4 \end{vmatrix} = (1-\lambda)(\lambda^2 - 5\lambda + 4) - 2(5 - \lambda - 4) - (-4 + 4\lambda) \\ &= -\lambda^3 + \lambda^2(1+5) + \lambda(-5 - 4 + 2 - 4) + (4 - 2 + 4) \\ &= -\lambda^3 + 6\lambda^2 - 11\lambda + 6 = 0 \end{aligned}$$

Kokeilemalla läpi mahdolliset kokonaislukuratkaisut havaitaa, että $\lambda = 1$ on ratkaisu. Jakamalla $\lambda - 1$:llä saadaan toisen asteen yhtälö $-\lambda^2 + 5\lambda - 6 = 0$, jolla on juuret $\lambda = 2$ ja $\lambda = 3$. Siis ominaisarvot ovat erilllisiä ja reaalisia, niin lauseen 6.12 nojalla ominaisvektorit ovat lineaarisesti riippumattomia. Ratkaistaan nämä: Kun $\lambda = 1$, niin

$$0 = (A - I)u = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 4 & -4 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} \iff \begin{cases} 2u_2 - u_3 = 0 \\ u_1 - u_2 + u_3 = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} u_3 = 2u_2 \\ u_1 = u_2 - u_3 = -u_2 \end{cases} \implies u = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} u_2$$

Kun $\lambda = 2$, niin

$$0 = (A - 2I)u = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 4 & -4 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} \iff \begin{cases} u_1 - 2u_2 + u_3 = 0 \\ 4u_1 - 4u_2 + 3u_3 = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} u_1 - 2u_2 + u_3 = 0 \\ 4u_2 - u_3 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} u_1 = 2u_2 - u_3 = -2u_2 \\ u_3 = 4u_2 \end{cases}$$

$$\implies u = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} u_2$$

Kun $\lambda = 3$, niin

$$0 = (A - 3I)u = \begin{pmatrix} -2 & 2 & -1 \\ 1 & -3 & 1 \\ 4 & -4 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} \iff \begin{cases} -2u_1 + 2u_2 - u_3 = 0 \\ u_1 - 3u_2 + u_3 = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} -2u_1 + 2u_2 - u_3 = 0 \\ -u_1 - u_2 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} u_1 = -u_2 \\ u_3 = -2u_1 + 2u_2 = 4u_2 \end{cases}$$

$$\implies u = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} u_2$$

Siis yhtälösysteemin yleinen ratkaisu on

$$x(t) = c_1 e^t \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + c_2 e^{2t} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} + c_3 e^{3t} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Kun ominaisarvot eivät ole erilliset, niin lausetta 6.12 ei voida soveltaa lineaarisen riippumattomuuden osoittamiseen. Toinen tärkeä erikoistapaus ovat *reaaliset symmetriset systeemit*, eli yhtälöt

$$x'(t) = Ax(t),\ A \in \mathbb{R}^{n\times n},\ A = A^T.$$

Nämä ovat tärkeitä seuraavan lineaarialgebran kurssilla osoitetun ominaisuuden takia:

Lause 6.14. *Jos A on symmetrinen $n \times n$-reaalimatriisi, niin* kaikki *sen ominaisarvot ovat reaalisia ja sillä on n lineaarisesti riippumatonta ominaisvektoria.*

Siis lauseen 6.10 oletukset ovat aina voimassa reaalisille symmetrisille systeemeille. Katsotaan tätäkin esimerkillä:

Esimerkki 6.15. Tarkastellaa systeemiä

$$x'(t) = Ax(t), \quad A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Nyt $A = A^T$, joten A on symmetrinen 3×3-reaalimatriisi. Lasketaan ominaisarvot:

$$\begin{aligned}
\det\,(A - \lambda I) &= \begin{vmatrix} 1-\lambda & -2 & 2 \\ -2 & 1-\lambda & 2 \\ 2 & 2 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)\begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 2 & 1-\lambda \end{vmatrix} \\
&+ 2\begin{vmatrix} -2 & 2 \\ 2 & 1-\lambda \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} -2 & 1-\lambda \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = (1-\lambda)((1-\lambda)^2 - 4)) \\
&+ 2(2\lambda - 6) + 2(2\lambda - 6) = (1-\lambda)(\lambda - 1 - 2)(\lambda - 1 + 2) \\
&+ 8(\lambda - 3) = (\lambda - 3)\big((1-\lambda)(\lambda+1) + 8\big) \\
&= (\lambda - 3)(1 - \lambda^2 + 8) = -(\lambda - 3)^2(\lambda + 3) = 0
\end{aligned}$$

Siis ominaisarvoja on kaksi: kaksinkertainen juuri $\lambda = 3$) ja yksinkertainen juuri $\lambda = -3$. Määrätään ominaisvektorit: Kun $\lambda = 3$, niin

$$0 = (A - 3I)u = \begin{pmatrix} -2 & -2 & 2 \\ -2 & -2 & 2 \\ 2 & 2 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} \iff u_1 + u_2 - u_3 = 0$$

$$\iff \begin{cases} u_1 = -u_2 + u_3 \\ u_2 = u_2 u_3 = u_3 \end{cases} \iff u = u_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + u_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Kun $\lambda = -3$, niin

$$0 = (A + 3I)u = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 2 \\ -2 & 4 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} \iff \begin{cases} 2u_1 - u_2 + u_3 = 0 \\ -u_1 + 2u_2 + u_3 = 0 \\ u_1 + u_2 + 2u_3 = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} 3u_2 + 3u_3 = 0 \\ u_1 + u_2 + 2u_3 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} u_1 = -u_2 - 2u_3 = u_2 \\ u_3 = -u_2 \end{cases}$$

$$\iff u = u_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Siis yhtälösysteemin yleinen ratkaisu on

$$x(t) = c_1 e^{3t} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 e^{3t} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + c_3 e^{-3t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

6.4 Kompleksiset ominaisarvot

Yleensä ominaisarvot eivät ole reaalisia: tarkastellaan $n \times n$-matriisin karakteristista yhtälöä:

$$\det\,(A - \lambda I) = (-1)^n \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + a_1\lambda + a_0 = 0, \quad a_j \in \mathbb{R}.$$

Jos $\lambda \in \mathbb{C}$ on juuri, niin myös sen kompleksikonjugaatti $\overline{\lambda}$ on juuri:

$$\begin{aligned} 0 &= \overline{(-1)^n \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots a_1\lambda + a_0} \\ &= (-1)^n \overline{\lambda}^n + a_{n-1}\overline{\lambda}^{n-1} + \dots a_1\overline{\lambda} + a_0, \end{aligned}$$

sillä $\overline{a_j} = a_j$. Siis kompleksiset ominaisarvot reaalisella matriisilla esiintyvät aina pareittain: $\lambda = \alpha + i\beta$ ja $\overline{\lambda} = \alpha - i\beta$. Havaitaan, edelleen että $Au = \lambda u$ jos ja vain jos $A\overline{u} = \overline{\lambda}\overline{u}$. Siis jos u on ominaisarvoa λ vastaava ominaisvektori, niin $\overline{u}$ vastaa ominaisarvoa $\overline{\lambda}$.

Pyritään nyt löytämään reaaliset ratkaisut, jotka vastaavat ominaisarvoja $\lambda = \alpha + i\beta$, $\overline{\lambda} = \alpha - i\beta$, kun $\beta \neq 0$. Merkitään näitä vastaavia ominaisvektoreita vastaavati $u = a + ib$ ja $\overline{u} = a - ib$. Jos $w_1(t) = e^{\lambda t}u$ ja $w_2(t) = e^{\overline{\lambda}t}\overline{u}$, niin $w_1'(t) = Aw_1(t)$ ja $w_2'(t) = Aw_2(t)$. Määrätään funktion $w_1(t)$ reaali- ja imaginaariosat:

$$\begin{aligned} w_1(t) &= e^{\lambda t}u = e^{\alpha t}(\cos(\beta t) + i\sin(\beta t))(a + ib) \\ &= e^{\alpha t}\big((a\cos(\beta t) - b\sin(\beta t)) + i(b\cos(\beta t) + a\sin(\beta t)\big) \\ &=: x_1(t) + ix_2(t). \end{aligned}$$

Nyt $x_1(t)$ ja $x_2(t)$ ovat reaalisia ratkaisuja. Lisäksi ne ovat lineaarisesti riippumattomia

Lause 6.16. *Jos $\beta = Im\ \lambda \neq 0$, niin $x_1(t)$ ja $x_2(t)$ ovat lineaarisesti riippumattomia.*

Todistus. Olkoon $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ sellaisia, että

$$0 = c_1x(t) + c_2x(t) = e^{\alpha t}\big((c_1a + c_2b)\cos(\beta t) + (c_2a - c_1b)\sin(\beta t)\big)$$

Koska $\beta \neq 0$, niin tästä voidaan päätellä, että seuraava lineaarinen yhtälösysteemi toteutuu:

$$\begin{cases} c_1a + c_2b = 0 \\ -c_1b + c_2a = 0 \end{cases}$$

Koska $u = a + ib$ on ominaisvektori, niin $u \neq 0$. Siispä jollakin indeksillä $j = 1, \dots, n$ on $a_j \neq 0$ tai $b_j \neq 0$. Edellisestä yhtälösysteemistä saadaan siis

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1a_j + c_2b_j \\ -c_1b_j + c_2b_j \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_j & b_j \\ -b_j & a_j \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}.$$

Koska $a_j \neq 0$ tai $b_j \neq 0$, niin determinantti

$$\begin{vmatrix} a_j & b_j \\ -b_j & a_j \end{vmatrix} = a_j^2 + b_j^2 \neq 0.$$

Siispä $c_1 = c_2 = 0$ ja funktiot x_1 ja x_2 ovat lineaarisesti riippumattomia. $\square$

Olemme siis osoittaneet lauseen:

Lause 6.17. *Jos $\lambda = \alpha + i\beta$ on reaalisen matriisin ominaisarvo ja $\beta \neq 0$, niin sitä vastaa lineaarisesti riippumaton ratkaisupari*

$$\begin{aligned} x_1(t) &= e^{\alpha t}(a\cos(\beta t) - b\sin(\beta t)) \\ x_2(t) &= e^{\alpha t}(b\cos(\beta t) + a\sin(\beta t)), \end{aligned}$$

missä $u = a + ib \neq 0$ on ominaisarvoa λ vastaava ominaisvektori.

Esimerkki 6.18. Määrää yhtälön

$$x'(t) = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -1 & -3 \end{pmatrix} x(t) =: Ax(t)$$

yleinen ratkaisu. **Ratkaisu:** Määrätään ominaisarvot:

$$\det\,(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} -1-\lambda & 2 \\ -1 & -3-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 4\lambda + 5 = 0$$

$$\iff \lambda = \frac{-4 \pm \sqrt{16-20}}{2} = -2 \pm i$$

Ratkaistaan ominaisvekorit, kun $\lambda = -2 + i$:

$$\begin{pmatrix} 1-i & 2 \\ -1 & -1-i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = 0 \iff u_1 = -(1+i)u_2$$

$$\implies u = -\begin{pmatrix} 1+i \\ -1 \end{pmatrix} u_2$$

Koska $\lambda = -2 + i$, niin $\alpha = -2$, $\beta = 1$. Vastaavasti vektorit

$$a = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Yhtälösysteemin perusjärjestelmä on lauseen 6.17 nojalla

$$x_1(t) = e^{-2t}(\cos(t) \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \sin(t) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix})$$

$$x_2(t) = e^{-2t}(-\cos(t) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \sin(t) \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix})$$

6.5 Epähomogeeniset systeemit

Seuraavaksi tutkimme epähomogeenista yhtälöä (EY)

$$x'(t) = Ax(t) + f(t), \quad x, f : I \to \mathbb{R}^n. \tag{6.8}$$

Asetetaan esin määritelmä:

Määritelmä 6.19. Jos $x_j(t)$, $j = 1, \ldots, n$, on homogeenisen yhtälö (HY)

$$x'(t) = Ax(t)$$

perusjärjestelmä, niin matriisi

$$X(t) = \text{col}\,(x_1(t), \ldots, x_n(t))$$

on (HY):n *perusmatriisi.*

Mielivaltainen homogeenisen yhtälön ratkaisu voidaan siis esittää muodossa

$$x(t) = c_1x_1(t) + \cdots + c_nx_n(t) = X(t)c, \quad c = (c_1, \ldots, c_n)^T.$$

Kuten 1. kertaluvun epähomogeenisen lineaarisen skalaariyhtälön tapauksessa, pyrimme nyt ratkaisemaan (EY) varioimalla vakiota. *Vakion variointi systeemille* voidaan nyt tehdä seuraavasti. Haetaan epähomogeenisen yhtälön (EY) ratkaisua muodossa

$$x(t) = X(t)c(t), \quad c(t) = (c_1(t), \ldots, c_n(t))^T.$$

Ensimmäinen ongelma on, kuinka vektorifunktio $x(t)$ derivoidaan matriisitulosta? Katsotaan derivointi komponenteittain: Kun $x = (x_1, \ldots, x_n)^T$, niin jokaisella $i = 1, \ldots, n$ on

$$\begin{aligned} x_i'(t) &= \frac{d}{dt}\Big(\sum_{j=1}^{n} X_{i,j}(t)c_j(t)\Big) \\ &= \sum_{j=1}^{n} \big(X_{i,j}'(t)c_j(t) + X_{i,j}c_j'(t)\big) \end{aligned}$$

Yhdistämällä nämä, ja kirjoittamalla matriisimuodossa saamme siis

$$x'(t) = X'(t)c(t) + X(t)c'(t)$$

Harjoitustehtävän nojalla perusmatriisin derivaatta toteuttaa matriisiyhtälön

$$X'(t) = AX(t),$$

joten

$$\begin{aligned} x'(t) = Ax(t) + f(t) &\Longleftrightarrow X'(t)c(t) + X(t)c'(t) = AX(t)c(t) + X(t)c'(t) \\ &= Ax(t) + X(t)c'(t) = Ax(t) + f(t) \\ &\Longleftrightarrow X(t)c'(t) = f(t) \end{aligned}$$

Koska $X(t)$ on perusmatriisi, niin sen sarakkeet $x_j(t)$ ovat lineaarisesti riippumattomia. Siispä $X(t)$ on kääntyvä, joten $c'(t)$ voidaan ratkaista:

$$c'(t) = X(t)^{-1}f(t) \Longrightarrow c(t) = \int^t X^{-1}(t)f(t)dt$$

$$\Longrightarrow x(t) = X(t)\int^t X^{-1}(t)f(t)dt$$

Valitettavasti ratkaisu vain näyttää yksinkertaiselta. Homogeenisen yhtälön ratkaisusta saatavan perusmatriisin $X(t)$ käänteismatriisin $X^{-1}(t)$ määrääminen voi olla hankalaa ja myös integrointi voi olla vaikeaa.

Tarkastellaan lineaarista alkuarvotehtävää

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}x(t) &= a(t)x(t), \quad t > s, \\ x(r) &= \xi. \end{cases} \tag{6.9}$$

Merkitään tehtävän (6.9) ratkaisua

$$x(t) = u(t, r; \xi).$$

Allkuehdon mukaan pätee

$$u(r, r; \xi) = \xi. \tag{6.10}$$

Koska (6.9) on lineaarinen, niin tiedämme, että

$$u(t, r; \xi) = \xi e^{\int_r^t a(\tau)d\tau}. \tag{6.11}$$

Tarkastellaan tilannetta välillä $[r, t]$ ja valitaan piste $s \in (r, t)$. Kaavan (6.11) mukaan

$$u(s, r; \xi) = \xi e^{\int_r^s a(\tau)d\tau}. \tag{6.12}$$

Jo nyt otetaan tämä arvo uudeksi alkuarvoksi ja ratkaistaan yhtälö välillä $[s, t]$, niin on intuitiivisesti selvää, että ratkaisun arvo pisteessä t on $u(t, r, \xi)$. Ja näin onkin:

$$\begin{aligned} &u(t, s; u(s, r, \xi)) = u(s, r, \xi)e^{\int_s^t a(\tau)d\tau} = \xi e^{\int_r^s a(\tau)d\tau} e^{\int_s^t a(\tau)d\tau} = \\ &\xi e^{\int_r^s a(\tau)d\tau + \int_s^t a(\tau)d\tau} = \xi e^{\int_r^t a(\tau)d\tau} = u(t, r; \xi). \end{aligned} \tag{6.13}$$

Otetaan nyt relaatiot (6.10) & (6.13) *dynaamisen systeemin* määritelmäksi.

Määritelmä 6.20. Kuvaus $u : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ on *dynaaminen systeemi* $\mathbb{R}$:ssä jos

$$u(t, s; u(s, r, \xi)) = u(t, r; \xi), \quad r \leq s \leq t, \quad \xi \in \mathbb{R}, \tag{6.14}$$

$$u(r, r; \xi) = \xi, \quad r \in \mathbb{R}, \quad \xi \in \mathbb{R}. \tag{6.15}$$

On huomattava, että lineaarisuus *ei* sisälly dynaamisen systeemin määritelmään. Itse asiassa tulemme myöhemmin osoittamaan, että myös epälineaarinen differentiaaliyhtälö virittää dynaamisen systeemin. Määritelmä on myös riippumaton *tila-aavaruudesta*, joka tässä on $\mathbb{R}$. Myöhemmin tulemme tarkastelemaan dynaamisia systeemejä esimerkiksi avaruudessa $\mathbb{R}^n$.