Matematiikan laitos
Lineaarialgebra ja matriisilaskenta I
Harjoitus 1
10.09.2009
Ratkaisuehdotuksia
Aleksandr Nuija

1. Olkoot $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in \mathbb{R}^n$ ja $c, d \in \mathbb{R}$. Todista, että

$$\begin{aligned} &c(\vec{u}+\vec{v}) = c\vec{u} + c\vec{v}, \\ &c(d\vec{u}) = (cd)\vec{u}, \\ &\vec{u}\cdot(\vec{v}+\vec{w}) = \vec{u}\cdot\vec{v} + \vec{u}\cdot\vec{w}, \\ &\vec{u}\cdot\vec{u} \geq 0, \\ &\vec{u}\cdot\vec{u} = 0 \text{ jos ja vain jos } \vec{u} = 0. \end{aligned}$$

Ratkaisu: Olkoot

$$\begin{aligned} \vec{u} &= (u_1, \ldots, u_n), \\ \vec{v} &= (v_1, \ldots, v_n), \end{aligned}$$

missä $u_1, \ldots, u_n, v_1, \ldots, v_n \in \mathbb{R}$ ovat vektorien $\vec{u}$ ja $\vec{v}$ komponentit. Tällöin vektorien yhteenlaskun ja skaalarilla kertomisen määritelmien nojalla

$$c(\vec{u}+\vec{v}) = c(u_1+v_1, \ldots, u_n+v_n) = (c(u_1+u_n), \ldots, c(u_n+v_n)) =$$

$$(cu_1+cv_n, \ldots, cu_n+cv_n) = (cu_1, \ldots, cu_n) + (cv_1, \ldots, cv_n) = c\vec{u} + c\vec{v}.$$

Tässä on käytetty osittelulakia

$$a(b+c) = ab + ac, \tag{1}$$

joka on tunnetusti voimassa mielivataisille reaaliluvuille $a, b, c \in \mathbb{R}$.

Vastaavasti

$$c(d\vec{u}) = c(du_1, \ldots, du_n) = (c(du_1), \ldots, c(du_n)) = ((cd)u_1, \ldots, (cd)u_n)) = (cd)\vec{u}.$$

Tämä lasku taas perustuu eräseen reaalilukujen ominaisuuteen, nimittäin kertolaskun assosiativisuuteen,

$$a(bc) = (ab)c,$$

$a, b, c \in \mathbb{R}$.

Käyttämällä uudestaan osittelulakia (1) saadaan

$$\vec{u}\cdot(\vec{v}+\vec{w}) = \sum_{i=1}^{n} u_i(\vec{v}+\vec{w})_i = \sum_{i=1}^{n} u_i(v_i+w_i) = \sum_{i=1}^{n} u_iv_i+u_iw_i = \sum_{i=1}^{n} u_iv_i+\sum_{i=1}^{n} u_iw_i = \vec{u}\cdot\vec{v}+\vec{u}\cdot\vec{w}.$$

Mielevaltaiselle $\vec{u} \in \mathbb{R}^n$ saadaan

$$\vec{u} \cdot \vec{u} = \sum_{i=1}^{n} u_iu_i = \sum_{i=1}^{n} u_i^2.$$

Tunnetusti jokaisen reaaliluvun neliö on ei-negatiivinen ja ei-negatiivisten lukujen summa on ei-negatiivinen. Tästä seuraa, että

$$\vec{u} \cdot \vec{u} \geq 0$$

kaikilla $\vec{u} \in \mathbb{R}^n$. Lisäksi jos $\vec{u} \neq 0$, niin $u_j \neq 0$ jollakin $j \in \{1, \ldots, n\}$, joten

$$\vec{u} \cdot \vec{u} = \sum_{i=1}^{n} u_i^2 \geq u_j^2 > 0,$$

sillä nollasta eroavan reaaliluvun neliö on aidosti positiivinen. Näin ollen, jos $\vec{u} \cdot \vec{u} = 0$, niin $\vec{u} = 0$. Kääntäen helposti nähdään, että

$$0 \cdot 0 = \sum_{i=1}^{n} 0^2 = 0.$$

2. Tarkastellaan tasossa kulkevia suoria, jotka määräytyvät yhtälöistä

$$\text{(a) } x_2 = 3x_1 - 1, \qquad \text{(b) } 3x_1 + 2x_2 = 5.$$

Kirjoita kumpikin suora vektorimuodossa $\vec{x} = \vec{p} + t\vec{d}$.

Ratkaisu: a) Merkitään l:llä tason osajoukkoa, jonka yhtälö

$$x_2 = 3x_1 - 1$$

määrittele. Toisin sanoen $\vec{x} = (x_1, x_2) \in l$ jos ja vain jos

$$x_2 = 3x_1 - 1.$$

Sijoittamalla tähän yhtälöön $x_1 = 0$ nähdään, että piste $\vec{p} = (0, -1) \in l$. Lisäksi jos $\vec{x} = (x_1, x_2) \in l$, niin

$$\vec{x} - \vec{p} = (x_1, 3x_1 - 1) - (0, -1) = (x_1, 3x_1) = x_1(1, 3),$$

joten $\vec{x}$ voidaan esittää muodossa

$$\vec{x} = \vec{p} + t\vec{d},$$

missä $\vec{d} = (1, 3)$ (ja $t = x_1$). Kääntäen jos $\vec{x} = \vec{p} + td$ jollakin $t \in \mathbb{R}$, niin

$$3x_1 - 1 = 3(p_1 + td_1) - 1 = 3t - 1 = p_2 + td_2 = x_2.$$

Näin ollen $\vec{x}$ on suoralla l jos ja vain jos $\vec{x} = \vec{p} + t\vec{d}$, missä $\vec{p} = (0, -1)$ ja $\vec{d} = (1, 3)$.

Toinen tapa: Yllä olevassa ratkaisussa ei oletetaan mitään tietoa suorista. Yleensä tämän tyyppinen tehtävä ratkaistaan näin:
Oletamme tunnetuksi, että yhtälö

$$x_2 = 3x_1 - 1$$

tosiaankin määrittelee suoran tasossa. Oletetaan myös tunnetuksi sen, että kaksi suoran pistettä määrävät sen yksikäsitteisesti. Lisäksi jos $\vec{v}$ ja $\vec{w}$ ovat kaksi eri suoran l pistettä, niin tämän suoran pisteet voidaan esittää muodossa $x = \vec{v} + t(\vec{w} - \vec{v})$, missä $t \in \mathbb{R}$. Kääntäen mikä tahansa tätä muotoa oleva piste on suoralla l. Tässä siis $\vec{d} = \vec{w} - \vec{v}$ on suoran l suuntavektori.
Näin ollen riittää löytää kaksi eri pistettä suoralla. Yllä on jo löydetty piste $\vec{p} = (0, -1) \in l$. Sijoittamalla suoran yhtälöön $x_1 = 1$ nähdään, että piste $\vec{w} = (1, 2) \in l$. Tästä saadaan suoran suuntavektoriksi

$$\vec{d} = \vec{w} - \vec{p} = (1, 3).$$

Tästä nähdään, että suoran pisteet ovat muotoa

$$\vec{x} = \vec{p} + t\vec{d},$$

missä $\vec{p} = (0, -1)$ ja $\vec{d} = (1, 3)$.

Huomautus: Suoran esitys muodossa

$$l = \{\vec{p} + t\vec{d} | t \in \mathbb{R}\}$$

ei ole yksikäsitteinen, sillä alkuvektoriksi $\vec{p}$ voidaan valita mikä tahansa suoran piste ja suuntavektoriksi kelpaa myös mikä tahansa toisen suuntavektorin monikerta.

b) Merkitään yhtälön

$$3x_1 + 2x_2 = 5$$

määritelemää suoraa l:llä. Taas riittää löytää kaksi eri pistettä suoralta. Valitsemalla $x_1 = -1$ ja $x_1 = 1$ nähdään, että pisteet $\vec{p} = (-1, 4)$ ja $\vec{v} = (1, 1)$ ovat suoralla. Suuntavektoriksi saadaan

$$\vec{d} = \vec{v} - \vec{p} = (2, -3).$$

Näin ollen suoran pisteet voidaan esittää muodossa $\vec{x} = \vec{p} + t\vec{d}$, $t \in \mathbb{R}$, missä $\vec{p} = (-1, 4)$ ja $\vec{d}(2, -3)$.

3. Tarkastellaan sitä tasoa avaruudessa $\mathbb{R}^3$, joka sisältää pisteet

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

Kirjoita kyseinen taso vektorimuodossa $\vec{x} = \vec{p} + s\vec{u} + t\vec{v}$.

Ratkaisu: Kun tason kolme pistettä $\vec{p}$, $\vec{a}$ ja $\vec{b}$, jotka eivät ole samalla suoralla, tunnetaan, niin taso on yksikäsitteisesti määrätty ja sen vektorit voidaan esittää muodossa

$$\vec{x} = \vec{p} + s\vec{u} + t\vec{v},$$

missä $\vec{v} = \vec{a} - \vec{p}$ ja $\vec{v} = \vec{b} - \vec{p}$ ovat tason suuntavektorit, $s, t \in \mathbb{R}$.

Tarkistetaan ensin, että tehtäväannossa annetut pisteet eivät ole samalla suoralla. Vektorien $\vec{p} = (1, 1, 1)$ ja $\vec{a} = (0, 1, -1)$ muodostama suoran pisteet ovat muotoa

$$\vec{x} = \vec{p} + t(\vec{a} - \vec{p}) = (1, 1, 1) + t(-1, 0, -2), t \in \mathbb{R}.$$

Jos vektori $\vec{b} = (4, 0, 2)$ olisi tällä suoralla, niin se tarkoittaisi, että jollakin $t_0 \in \mathbb{R}$ pätee

$$(3, -1, 1) = \vec{b} - \vec{p} = t_0(-1, 0, -2) = (-t_0, 0, -2t_0).$$

Vertamaalla vasemman ja oikean puoleen vektorien toista komponenttiä, nähdään, että silloin pitää olla $-1 = 0$, mika on ristiriita. Näin ollen $\vec{b}$, $\vec{a}$ ja $\vec{p}$ eivät ole samalla suoralla, joten ne määrittele tason yksikäsitteisesti. Tämän tason pisteiden esitys vektorimuodossa saadaan tästä laskemalla vielä suuntavektorit $\vec{u} = \vec{a} - \vec{p} = (-1, 0, -2)$ ja $\vec{v} = \vec{b} - \vec{p} = (3, -1, 1)$. Saadaan esitys

$$\vec{x} = \vec{p} + s\vec{u} + t\vec{v}, s, t \in \mathbb{R},$$

missä $\vec{p} = (1, 1, 1)$, $\vec{u} = (-1, 0, -2)$ ja $\vec{v} = (3, -1, 1)$.

Huomautus: Tason esitys tässä muodossa ei ole yksikäsitteinen. Alkupisteeksi $\vec{p}$ kelpaa mikä tahansa tason piste. Myös suuntavektorit eivät ole yksikäsitteisiä.

4. Mitkä seuraavista yhtälöistä ovat lineaarisia? Miksi?

(a) $\sqrt{2}x+\pi^2y-(\log\pi^3)z = 1$, (b) $4y+e^z = 6$, (c) $x_1+2x_2 = 4+x_4-x_5$.

Ratkaisu: Tuntemattomien $x_1, x_2, \ldots, x_n$ yhtälö on lineaarinen jos se on muotoa

$$a_1x_1 + \ldots + a_nx_n = b,$$

missä $a_1, \ldots, a_n, b \in \mathbb{R}$ ovat vakioita, tai se saadaan tähän muotoon soveltamalla tavanomaisia yhtälön muokkamistapoja, kuten esimerkiksi yhtälön jäsenten siirto yhtälön toiselle puoleelle.

a)-kohdan yhtälö on lineaarinen, sillä se on kolmen tuntemattoman x, y, z joka voidaan kirjoittaa muotoon

$$a_1x + a_2y + a_3z = b$$

valitsemalla $a_1 = \sqrt{2}$, $a_2 = \pi^2$, $a_3 = -(\log\pi^3)$ ja $b = 1$.

b)-kohdan yhtälö ei ole lineaarinen, sillä eräs sen tuntematon z esiintyy lausekkessa e^z, joka ei riippuu z:stä lineaarisesti. Voidaan helposti osoittaa, että tämän yhtälön ratkaisujoukko ei ole minkään lineaarisen yhtälön ratkaisujoukko.

c)-kohdan yhtälö on lineaarinen, sillä siirtämällä kaikki tuntemattomat yhtälön vasemmalle puolelle se saadaan muotoon

$$x_1 + 2x_2 - x_4 + x_5 = 4.$$

5. Luennolla määriteltiin kolme alkeisrivioperaatiota (*elementary row operations*). Osoita, että kukin alkeisrivioperaatio voidaan kääntää (eli suorittaa takaperin).

   Ratkaisu: Jokainen alkeisrivioperaatio O muuttaa mielivaltainen matriisi M uudeksi matriisiksi $O(M)$. Operaation O käänteisoperaatiolla O' tarkoitetaan sellaista operaatiota joka muuttaa matriisi $O(M)$ takaisin alkuperäiseksi matriisiksi M. Toisin sanoen käänteisoperaatio eliminoi alkuperäisen operaation tekemät muutokset.

   Tarkastellaan erityyppiset alkeisrivioperaatiot. Merkitään mielivaltaisen matriisin i:s rivi R_i:llä. Merkinnällä $R_i \mapsto R$ tarkoitetaan alkeirivioperaatiota joka muuttaa rivi R_i uudeksi riviksi R.

   1) Operaatio vaihtaa keskenään kaksi matriisin riviä eli $R_i \mapsto R_j$, $R_j \mapsto R_i$ joillakin indekseillä i, j. Tämä operaatio on itsensä käänteisoperaatio, sillä vaihtamalla samat rivit keskenään uudestaan päästään alkuperäiseen matriisiin.
   2) Operaatiossa eräs matriisin rivi kerrotaan reaaliluvulla $t \neq 0$. Tällöin kertomalla sama rivi reaaliluvulla $1/t$ saadaan alkuperäinen matriisi.Toisin sanoen operaation $R_i \mapsto tR_i$ käänteisoperaatio on $R_i \mapsto 1/tR_i$.
   3) Operaatiossa riviin j lisätään rivin i monikerta eli $R_j \mapsto R_j + tR_i$, missä $t \in \mathbb{R}$. Tämän operaation käänteisoperaatio on $R_j \mapsto R_j - tR_i$.

6. Alla olevassa kuvassa ohuet viivat ovat pikselien reunoja ja paksut viivat kuvaavat röntgensäteitä. Pikselin sivun pituus on yksi. Ajatellaan, että kussakin pikselissä on tuntematon röntgensäteilyn vaimenemiskerroin x_j, $j = 1, 2, \dots, 9$. (Voit numeroida pikselit haluamassasi järjestyksessä.) Kukin röntgensäde tuottaa mittausarvon $m_k =$

$\ell_{k1}x_1 + \ell_{k2}x_2 + \cdots + \ell_{k9}x_9$, missä $1 \leq k \leq 6$ ja ℓ_{kj} on sen matkan pituus, jonka säde numero k kulkee pikselissä numero j. (Voit numeroida myös röntgensäteet haluamassasi järjestyksessä.) Kirjoita mittaus lineaariseksi yhtälöryhmäksi muuttujille $x_1, x_2, \ldots, x_9$.

Ratkaisu: Numeroidaan pikselit ylhäältä alaspain vasemmalta oikealle.

Numeroidaan ensimmäsen kuvan säteet ylhäältä alaspäin numeroilla 1, 2, 3, niin että säde numero 1 kulkee vain pikseleissä 1, 2 ja 3, säde numero 2 - pikseleissä 4, 5, 6 ja säde numero 3 - pikseleissä 7, 8, 9. Toisen kuvan säteen numeroidaan niin, että säde 4 kulkee pikseleissä 2, 4, säde 5 kulkee pikseleissä 3, 5, 7 ja säde 6 kulkee pikseleissä 6 ja 8.

Tarkastellaan ensin säteet 1, 2, 3. Jokaisen kokonaismatka s saadaan helposti Pythagoran lauseen avulla,

$$s = \sqrt{1^2 + 3^2} = \sqrt{10}.$$

Alkeisgeometriasta myös seuraa helposti, että jokaisen säteen matka jokaisessa kolmesta pikselissä jossa se ylipäätän käy on sama pikselistä riippumatta eli on

$$s/3 = \sqrt{10}/3.$$

Näin olleen kun $k = 1, 2, 3$ saadaan

$$l_{k(3k-2)} = l_{k(3k-1)} = l_{k(3k)} = \sqrt{10}/3$$

ja $l_{kj} = 0$ muuten.

Seuraavaksi tarkastellaan säteet 4, 5, 6. Kuvasta nähdään, että jos jokin näistä säteistä kulkee jossakin pikselissä niin sen kulkema matka tässä pikselissä on yhtä suuri kuin tämän pikselin lävistäjän pituus eli $\sqrt{2}$. Saadaan siis

$$l_{42} = l_{44} = l_{53} = l_{55} = l_{57} = l_{66} = l_{68} = \sqrt{2}$$

ja $l_{kj} = 0$ muuten.

Saadaan siis seuraava yhtälöryhmä

$$
\left\{
\begin{aligned}
\sqrt{10}/3x_1 + \sqrt{10}/3x_2 + \sqrt{10}/3x_3 &= m_1\\
\sqrt{10}/3x_4 + \sqrt{10}/3x_5 + \sqrt{10}/3x_6 &= m_2\\
\sqrt{10}/3x_7 + \sqrt{10}/3x_8 + \sqrt{10}/3x_9 &= m_3\\
\sqrt{2}x_2 + \sqrt{2}x_4 &= m_4\\
\sqrt{2}x_3 + \sqrt{2}x_5 + \sqrt{2}x_7 &= m_5\\
\sqrt{2}x_6 + \sqrt{2}x_8 &= m_6
\end{aligned}
\right.
\tag{2}
$$