HELSINGIN YLIOPISTO
Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Lineaarialgebra ja matriisilaskenta I, Syksy 2009
Harjoitus 5, Ratkaisuehdotuksia
Vesa Tähtinen

---

1. Laske seuraavien matriisien käänteismatriisit Gaussin–Jordanin menetelmällä. Tarkista tulos kertolaskulla

$$(a)\begin{bmatrix}1 & 3\\ 2 & 5\end{bmatrix}, \qquad (b)\begin{bmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{bmatrix}.$$

Ratkaisu. (a)

$$\left[\begin{array}{cc|cc}1 & 3 & 1 & 0\\ 2 & 5 & 0 & 1\end{array}\right] \xrightarrow{R_2-2R_1} \left[\begin{array}{cc|cc}1 & 3 & 1 & 0\\ 0 & -1 & -2 & 1\end{array}\right] \xrightarrow{R_1+3R_2} \left[\begin{array}{cc|cc}1 & 0 & -5 & 3\\ 0 & -1 & -2 & 1\end{array}\right]$$
$$\xrightarrow{(-1)\cdot R_2} \left[\begin{array}{cc|cc}1 & 0 & -5 & 3\\ 0 & 1 & 2 & -1\end{array}\right],$$

jolloin käänteismatriisi on olemassa (vasemmalle puolelle saatiin I_2) ja tämä voidaan lukea nyt oikealta puolelta:

$$A^{-1} = \begin{bmatrix}-5 & 3\\ 2 & -1\end{bmatrix}.$$

Tarkistusta varten vetoamme nyt seuraavaan tulokseen

Lause 0.1. *Jos A ja B ovat $n \times n$-matriiseja ja $AB = I$, niin A ja B ovat säännöllisiä ja $B = A^{-1}$.*

Tämä todistetaan helposti käyttämällä tietoa, että

$$A \text{ on säännöllinen} \iff \det A \neq 0,$$

sekä determinantin tulokaavaa

$$\det(AB) = \det(A)\det(B).$$

<u>Tarkastus</u>.

$$\begin{bmatrix}1 & 3\\ 2 & 5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-5 & 3\\ 2 & -1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1\cdot(-5)+3\cdot 2 & 1\cdot 3+3\cdot(-1)\\ 2\cdot(-5)+5\cdot 2 & 2\cdot 3+5\cdot(-1)\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}.$$

OK.
(b)

$$\left[\begin{array}{cc|cc}0 & -1 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 0 & 1\end{array}\right] \xrightarrow{R_1\leftrightarrow R_2} \left[\begin{array}{cc|cc}1 & 0 & 0 & 1\\ 0 & -1 & 1 & 0\end{array}\right] \xrightarrow{(-1)\cdot R_2} \left[\begin{array}{cc|cc}1 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & -1 & 0\end{array}\right],$$

jolloin

$$A^{-1} = \begin{bmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{bmatrix}.$$

<u>Tarkastus.</u>

$$\begin{bmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\cdot 0+(-1)(-1) & 0\cdot 1-1\cdot 0\\ 1\cdot 0+0\cdot(-1) & 1\cdot 1+0\cdot 0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1.\end{bmatrix}$$

OK. $\square$

2. Olkoon B matriisi kokoa 3×3. Merkitään B':lla sitä matriisia, joka syntyy matriisista B rivioperaation $R_3 + 2R_1$ seurauksena. Muodosta sellainen matriisi C, että $B' = CB$. Onko C kääntyvä? Miksi?

Ratkaisu. Palautetaan mieleen alkeismuunnosten ja alkeismatriisien välinen yhteys. Olkoon ε tarkasteltava alkeismuunnos ja merkitään $E = \varepsilon(I)$, samainen alkeismuunnos sovellettuna identiteettimatriisiin. Jos A on $m \times n$-matriisi ja $E = \varepsilon(I)$ on $m \times m$-alkeismatriisi, niin pätee

$$EA = \varepsilon(A),$$

ts. EA=matriisi, joka saadaan tekemällä A:han alkeismuunnos ε.
Suoritetaan sitten alkeismuunnos

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_3+2R_1} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

ja merkitään

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

jolloin ylläolevan mukaan C on alkeismatriisi (erityisesti siten kääntyvä) ja

$$CB = B'.$$

$\square$

3. Tarkista lohkomatriisien avulla, että seuraavat yhtälöt ovat tosia:

$$(a) \quad \begin{bmatrix} A & B \\ 0 & D \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} A^{-1} & -A^{-1}BD^{-1} \\ 0 & D^{-1} \end{bmatrix},$$

$$(b) \quad \begin{bmatrix} I & B \\ C & I \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} (I-BC)^{-1} & -(I-BC)^{-1}B \\ -C(I-BC)^{-1} & I + C(I-BC)^{-1}B \end{bmatrix}$$

Ratkaisu. (a)

$$\begin{bmatrix} A & B \\ 0 & D \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} A^{-1} & -A^{-1}BD^{-1} \\ 0 & D^{-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} AA^{-1} + B \cdot 0 & A \cdot (-A^{-1})BD^{-1} + BD^{-1} \\ 0 \cdot A^{-1} + D \cdot 0 & 0 \cdot (-A)^{-1}BD^{-1} + DD^{-1} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} I & -I \cdot BD^{-1} + BD^{-1} \\ 0 & I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}.$$

(b)

$$\begin{bmatrix} I & B \\ C & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (I-BC)^{-1} & -(I-BC)^{-1}B \\ -C(I-BC)^{-1} & I + C(I-BC)^{-1}B \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} I \cdot (I-BC)^{-1} - BC(I-BC)^{-1} & -(I-BC)^{-1}B + B + BC(I-BC)^{-1}B \\ C \cdot (I-BC)^{-1} - C(I-BC)^{-1} & -C(I-BC)^{-1}B + I + C(I-BC)^{-1}B \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} (I-BC)(I-BC)^{-1} & -(I-BC)(I-BC)^{-1}B + B \\ 0 & I \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} I & -B + B \\ 0 & I \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}.$$

$\square$

4. Laske seuraavien matriisien käänteismatriisit Gaussin–Jordanin menetelmällä.

$$(a)\begin{bmatrix}2&3&0\\1&-2&-1\\2&0&-1\end{bmatrix},\qquad (b)\begin{bmatrix}1&1&0\\1&0&1\\0&1&1\end{bmatrix}.$$

Ratkaisu. (a)

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc}2&3&0&1&0&0\\1&-2&-1&0&1&0\\2&0&-1&0&0&1\end{array}\right]\xrightarrow{R_1\leftrightarrow R_2}\left[\begin{array}{ccc|ccc}1&-2&-1&0&1&0\\2&3&0&1&0&0\\2&0&1&0&0&1\end{array}\right]\xrightarrow{R_2-2R_1}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc}1&-2&-1&0&1&0\\0&7&2&1&-2&0\\2&0&-1&0&0&1\end{array}\right]\xrightarrow{R_3-2R_1}\left[\begin{array}{ccc|ccc}1&-2&-1&0&1&0\\0&7&2&1&-2&0\\0&4&1&0&-2&1\end{array}\right]\xrightarrow{R_3-\frac{4}{7}R_2}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc}1&-2&-1&0&1&0\\0&7&2&1&-2&0\\0&0&-\frac{1}{7}&-\frac{4}{7}&-\frac{6}{7}&1\end{array}\right]\xrightarrow{-7R_3}\left[\begin{array}{ccc|ccc}1&-2&-1&0&1&0\\0&7&2&1&-2&0\\0&0&1&4&6&-7\end{array}\right]\xrightarrow{R_2-2R_3}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc}1&-2&-1&0&1&0\\0&7&0&-7&-14&14\\0&0&1&4&6&-7\end{array}\right]\xrightarrow{R_1+R_3}\left[\begin{array}{ccc|ccc}1&-2&0&4&7&-7\\0&7&0&-7&-14&14\\0&0&1&4&6&-7\end{array}\right]\xrightarrow{\frac{1}{7}R_2}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc}1&-2&0&4&7&-7\\0&1&0&-1&-2&2\\0&0&1&4&6&-7\end{array}\right]\xrightarrow{R_1+2R_2}\left[\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&2&3&-3\\0&1&0&-1&-2&2\\0&0&1&4&6&-7\end{array}\right],$$

mistä päätellään, että $A^{-1}=\begin{bmatrix}2&3&-3\\-1&-2&2\\4&6&-7\end{bmatrix}$.

(b)

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc}1&1&0&1&0&0\\1&0&1&0&1&0\\0&1&1&0&0&1\end{array}\right]\xrightarrow{R_2-R_1}\left[\begin{array}{ccc|ccc}1&1&0&1&0&0\\0&-1&1&-1&1&0\\0&1&1&0&0&1\end{array}\right]\xrightarrow{R_3+R_2}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc}1&1&0&1&0&0\\0&-1&1&-1&1&0\\0&0&2&-1&1&1\end{array}\right]\xrightarrow{\frac{1}{2}R_3}\left[\begin{array}{ccc|ccc}1&1&0&1&0&0\\0&-1&1&-1&1&0\\0&0&1&-\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\end{array}\right]\xrightarrow{R_2-R_3}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc}1&1&0&1&0&0\\0&-1&0&-\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}\\0&0&1&-\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\end{array}\right]\xrightarrow{(-1)R_2}\left[\begin{array}{ccc|ccc}1&1&0&1&0&0\\0&1&0&\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\\0&0&1&-\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\end{array}\right]\xrightarrow{R_1-R_2}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}\\0&1&0&\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\\0&0&1&-\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\end{array}\right],$$

joten $A^{-1}=\begin{bmatrix}\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\\-\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\end{bmatrix}$. □

5. (a) Todista: jos A on kääntyvä matriisi ja $AB=0$, niin välttämättä $B=0$
(b) Konstruoi (ei-kääntyvä) 3×3-matriisi $A\neq 0$ ja matriisi $B\neq 0$, joille $AB=0$.

Ratkaisu. (a) Koska A on kääntyvä, sillä on olemassa käänteismatriisi A^{-1}. Kerrotaan tällä yhtälöä $AB=0$ puolittain vasemmalta, jolloin saadaan

$$A^{-1}\cdot(AB)=A^{-1}\cdot 0\iff (AA^{-1})B=0\iff IB=0\iff B=0.$$

(b) Merkitään

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \neq 0,$$

jolloin

$$\det A = 0 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} - 0 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} + 1 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0,$$

ja siten A on ei-kääntyvä 3×3-matriisi. Nyt

$$A^2 = A \cdot A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

joten voimme valita $B = A$. □

6. Neliömatriisi A on *idempotentti*, jos $A^2 = A$.
(a) Etsi kolme idempotenttia 2×2-matriisia.
(b) Todista, että ainoa kääntyvä idempotentti $n \times n$-matriisi on identiteettimatriisi.

Ratkaisu. (a) Triviaalisti I_2 on idempotentti matriisi. Muiden kahden kandidaatin löytämiseksi ajatellaan asiaa vaikkapa geometrisesti: xy-tasossa projektiot x- ja y-akselille ovat selvästi idempotentteja kuvauksia, ts.

$$\mathrm{pr}_x^2 = \mathrm{pr}_x \circ \mathrm{pr}_x = \mathrm{pr}_x, \quad \mathrm{pr}_y^2 = \mathrm{pr}_y \circ \mathrm{pr}_y = \mathrm{pr}_y.$$

Puetaan tämä matriisikielelle. Merkitään $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$, jolloin

$$A\mathbf{x} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ax + by \\ cx + dy \end{bmatrix},$$

jossa $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2$ on tasovektori esitettynä $\mathbb{R}^2$:n luonnollisen (ortogonaali-) kannan $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$ suhteen.

Valitaan $a = 1$ ja $b = c = d = 0$ (projektio x-akselille), jolloin $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$.
Laskemalla voidaan tarkistaa, että

$$A^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = A.$$

Vastaavasti voidaan valita $d = 1$ ja $a = b = c = 0$ (projektio y-akselille), jolloin $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$. Laskemalla voidaan tarkistaa, että myös tällöin $A^2 = A$.

<u>Vastaus</u>. Voidaan valita esimerkiksi matriisit I_2, $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ ja $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

(b) Olkoon A kääntyvä idempotentti $n \times n$-matriisi, jolloin pätee $A^2 = A$. Koska oletuksen nojalla A:lla on olemassa käänteismatriisi, voidaan tämä yhtälö kertoa puolittain vasemmalta A^{-1}:llä, jolloin saadaan

$$A^{-1} \cdot A^2 = A^{-1} \cdot A \iff (A^{-1}A) \cdot A = I \iff I \cdot A = I \iff A = I.$$

□