Lineaarialgebra ja matriisilaskenta I
Harjoitustehtävät 3 (28.9.–2.10.2009)
Ratkaisehdotukset
Jan Cristina

1. Ovatko seuraavat vektorit lineaarisesti riippumattomat? Perustele.

$$\vec{v}_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad \vec{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 4 \end{bmatrix}.$$

Vektorijonon lineaarisella riippumattomuudella tarkoitetaan, ettei mitään jonon jäsenistä voida esittää lineaarisena summana jonon muista jäsenistä. Tämä on esitetty kätevästi lineaarisen riippumattomuuden määritelmässä, joka palautetaan mieleen tässä.

Määr 1. Vektoreiden $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_k$ sanotaan olevan lineaarisesti riippumattomat, jos aina ehdosta

$$\lambda_1\vec{v}_1 + \lambda_2\vec{v}_2 + \cdots + \lambda_k\vec{v}_k = \vec{0}$$

seuraa, että $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 0, \ldots$, $\lambda_k = 0$.

Jos halutaan osoittaa, että $\vec{v}_1$ ja $\vec{v}_2$ ovat lineaarisesti riippumattomat, meidän pitää osoittaa, että mielivaltaisilla λ_1 ja λ_2, joilla

$$\lambda_1\vec{v}_1 + \lambda_2\vec{v}_2 = \vec{0},$$

on $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$. Jos kirjoitetaan vektorit sarakevektoreiksi, saadaan

$$\lambda_1 \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix} + \lambda_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 4 \end{bmatrix} = \vec{0}.$$

Voidaan tuoda kertoimet λ_1 ja λ_2 sulkujen sisälle:

$$\begin{bmatrix} 2\lambda_1 \\ -1\lambda_1 \\ 3\lambda_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \lambda_2 \\ 4\lambda_2 \\ 4\lambda_2 \end{bmatrix} = \vec{0}.$$

Voidaan kirjoittaa yhtälöt auki:

$$\begin{cases} 2\lambda_1 + \lambda_2 &= 0 \\ -\lambda_1 + 4\lambda_2 &= 0 \\ 3\lambda_1 + 4\lambda_2 &= 0. \end{cases}$$

Ei ole tarvetta pelkistää porrasmuotoon. Riittää käyttää rivioperaattoria $R_3 \to R_3 - R_2$:

$$\begin{cases} 2\lambda_1 + \lambda_2 &= 0 \\ -\lambda_1 + 4\lambda_2 &= 0 \\ 4\lambda_1 &= 0, \end{cases}$$

josta seuraa, että $\lambda_1 = 0$. Tätä syöttämällä ylempiin yhtälöihin saadaan

$$\begin{cases} \lambda_2 &= 0 \\ 4\lambda_2 &= 0, \end{cases}$$

joista seuraa, että $\lambda_2 = 0$. Toisin sanoen aina kun $\lambda_1\vec{v}_1 + \lambda_2\vec{v}_2 = \vec{0}$, niin $\lambda_1 = 0$ ja $\lambda_2 = 0$, eli $\vec{v}_1$ ja $\vec{v}_2$ ovat lineaarisesti riippumattomat.

Toinen ehdotus. Jos $\vec{v}_1$ ja $\vec{v}_2$ ovat kaksi vektoria, niin ehto

$$\lambda_1\vec{v}_1 + \lambda_2\vec{v}_2 = 0$$

joillain λ_1 ja λ_2, joista ainakin toinen on nollasta eroava, on ekvivalentti sen ehdon kanssa, että $\vec{v}_1 = \lambda\vec{v}_2$ tai $\vec{v}_2 = \lambda\vec{v}_1$ jollain λ. Eli, jos vektoreista $\vec{v}_1$ ja $\vec{v}_2$ ainakin toinen voidaan esittää toisen skaalauksena, niin vektorit eivät ole lineaarisesti riippumattomat.

2. Ovatko seuraavat vektorit lineaarisesti riippumattomat? Perustele.

$$\vec{v}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \vec{v}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \vec{v}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \vec{v}_4 = \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Käytetään samaa menetelmä kuin 1. tehtävässä. Kirjoitetaan

$$\lambda_1\vec{v}_1 + \lambda_2\vec{v}_2 + \lambda_3\vec{v}_3 + \lambda_4\vec{v}_4 = \vec{0}.$$

Jos kirjoitetaan vektorit sarakevektoreiksi, saadaan

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \lambda_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 2\lambda_2 \\ \lambda_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 3\lambda_3 \\ 2\lambda_3 \\ \lambda_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4\lambda_4 \\ 3\lambda_4 \\ 2\lambda_4 \\ \lambda_4 \end{bmatrix} = \vec{0}.$$

Tätä voidaan kirjoittaa yhtälö systeemiksi

$$\begin{cases} 4\lambda_4 &= 0 \\ 3\lambda_3 + 3\lambda_4 &= 0 \\ 2\lambda_2 + 2\lambda_3 + 2\lambda_4 &= 0 \\ \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4 &= 0. \end{cases}$$

Ylin yhtälö antaa, että $\lambda_4 = 0$. Kirjoitetaan loput yhtälöistä tätä hyödyttäen:

$$\begin{cases} 3\lambda_3 &= 0 \\ 2\lambda_2 + 2\lambda_3 &= 0 \\ \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 &= 0. \end{cases}$$

Taas ylin yhtälö antaa, että $\lambda_3 = 0$. Syötetään tämä loppuyhtälöihin:

$$\begin{cases} 2\lambda_2 &= 0 \\ \lambda_1 + \lambda_2 &= 0. \end{cases}$$

Taas ylin yhtälö antaa, että $\lambda_2 = 0$. Syötetään tämä viimeisen yhtälöön:

$$\lambda_1 = 0.$$

Eli jos $\lambda_1\vec{v}_1 + \lambda_2\vec{v}_2 + \lambda_3\vec{v}_3 + \lambda_4\vec{v}_4 = \vec{0}$, niin $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = 0$. Eli $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$, $\vec{v}_3$ ja $\vec{v}_4$ ovat lineaarisesti riippumattomat.

3. Laske seuraavat matriisitulot:

$$(a) \begin{bmatrix} -2 & 1 & 3 \\ 2 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} \quad (b) \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} \quad (c) \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{bmatrix}.$$

(a) Kyseessä on (3×3)-matriisi kertaa (3×1)-matriisi, eli tulo on (3×1)-matriisi. Lasketaan tulomatriisin ensimmäinen rivi:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} -2 & 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} &= (-2) \cdot 1 + 1 \cdot 1 + 3 \cdot (-1) \\ &= -2 + 1 - 3 \\ &= -4 \end{aligned}$$

Lasketaan toinen rivi:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 2 & -3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} &= 2 \cdot 1 + (-3) \cdot 1 + 1 \cdot (-1) \\ &= 2 - 3 - 1 \\ &= -2. \end{aligned}$$

Ja vielä viimeinen rivi:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} = 0 \cdot 1 + 1 \cdot 1 + 0 \cdot (-1)$$
$$= 1.$$

Näin saadaan lopputulokseksi

$$\begin{bmatrix} -4 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

(b) Kyseessä on (1×3)-matriisi kertaa (3×1)-matriisi, eli lopputulos on (1×1)-matriisi. Lasketaan auki

$$\begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3.$$

Eli kyseessä on vektorien sisätulo.

(c) (3×1)-matriisi kerrottuna (1×3)-matriisin kanssa on (3×3)-matriisi. Tässä tapauksessa tulo on seuraava:

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1x_1 & y_1x_2 & y_1x_3 \\ y_2x_1 & y_2x_2 & y_2x_3 \\ y_3x_1 & y_3x_2 & y_3x_3 \end{bmatrix}.$$

4. Kasvien yhteyttämisprosessissa hiilidioksidi ja vesi muuttuu glukoosiksi ja hapeksi. Etsi sopivat kertoimet reaktioyhtälöön

$$CO_2 + H_2O \longrightarrow C_6H_{12}O_6 + O_2.$$

Tehtävällä tarkoitetaan etsiä kertoimet a, b, c ja d siten, että oikealla puolella ja vasemmalla puolella ilmestyvien alkuaineiden atomien määräät ovat samoja. Käytetään seuraavaa yhtälöä ja lasketaan sitten alkuainekohtaisesti:

$$a \cdot CO_2 + b \cdot H_2O \longrightarrow c \cdot C_6H_{12}O_6 + d \cdot O_2.$$

Hiilelle (C) yhtälö saadaan seuraavasti: a kappaleesta CO_2-molekyylejä saadaan a kappaletta C-atomeja; b kappaleesta H_2O-molekyylejä ei saada yhtään hiiltä; c kappaleesta $C_6H_{12}O_6$-molekyylejä saadaan $6c$ hiiliatomia; ja d kappaleesta O_2-molekyylejä ei saada yhtään hiiltä. Jos kirjoitetaan yhtälönä, saamme

$$a = 6c.$$

Tekemällä sama hapelle saamme

$$2a + b = 6c + 2d,$$

ja vedyn osalta saamme

$$2b = 12c.$$

Kirjoitetaan yhtälösysteemi

$$\begin{cases} a \quad\quad -6c \quad\quad = 0 \\ 2a \; +b \; -6c \; -2d \; = 0 \\ \quad 2b \; -12c \quad = 0. \end{cases}$$

Tämä voidaan esittää matriisimuodossa

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -6 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -6 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & -12 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

Ja pelkistetään pelkistettyyn porrasmuotoon:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -6 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -6 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & -12 & 0 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{R_2-2R_1} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -6 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 6 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & -12 & 0 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{R_3-2R_2} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -6 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 6 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -24 & 4 & 0 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{\frac{-1}{24}R_3} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -6 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 6 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{6} & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{R_2-6R_3} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -6 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{6} & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{R_1+6R_3} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{6} & 0 \end{array}\right]$$

Näin olleen saamme, että $c = d/6$, $b = d$ ja $a = d$. Saadaksemme kokonaislukuja valitaan $d = 6$, jolloin lopputulokseksi tulee

$$6CO_2 + 6H_2O \longrightarrow C_6H_{12}O_6 + 6O_2.$$

5. Laske tulo AB kahdella tavalla: suoraan matriisitulon määritelmästäsekä hyödyntämällä lohkorakennetta, kun

$$A = \left[\begin{array}{cc|cc} 2 & 3 & 1 & 0 \\ 4 & 5 & 0 & 1 \end{array}\right] \quad B = \left[\begin{array}{c|cc} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \hline 1 & 5 & 4 \\ -2 & 3 & 2 \end{array}\right].$$

Lasketaan ensiksi matriisitulon määritelmän mukaan. Kyseessä on (2×4)-matriisi kertaa (4×3)-matriisi, eli tulo on (2×3)-matriisi. Lasketaan tulomatriisin 1. rivin 1. sarake:

$$2 \cdot 0 + 3 \cdot 0 + 1 \cdot 1 + 0 \cdot (-2) = 1;$$

1. rivin 2. sarake:

$$2 \cdot 1 + 3 \cdot 0 + 1 \cdot 5 + 0 \cdot 3 = 7;$$

1. rivin 3. sarake:

$$2 \cdot 0 + 3 \cdot 1 + 1 \cdot 4 + 0 \cdot 2 = 7;$$

2. rivin 1. sarake:

$$4 \cdot 0 + 5 \cdot 0 + 0 \cdot 1 + 1 \cdot (-2) = -2;$$

2. rivin 2. sarake:

$$4 \cdot 1 + 5 \cdot 0 + 0 \cdot 5 + 1 \cdot 3 = 7;$$

2. rivin 3. sarake:

$$4 \cdot 0 + 5 \cdot 1 + 0 \cdot 4 + 1 \cdot 2 = 7.$$

Eli lopputulos on

$$\begin{bmatrix} 1 & 7 & 7 \\ -2 & 7 & 7 \end{bmatrix}.$$

Kirjoitetaan A ja B lohkoina seuraavasti:

$$A = \left[\begin{array}{c|c} A_1 & I \end{array}\right] \quad B = \left[\begin{array}{c|c} \vec{0} & I \\ \hline \vec{b} & B_2 \end{array}\right].$$

$$A_1 = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}, \quad B_2 = \begin{bmatrix} 5 & 4 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}$$

ja I on 2-rivinen identiteettimatriisi. Näin

$$\begin{aligned} AB &= \left[\begin{array}{c|c} A_1\vec{0} + I\vec{b} & A_1 I + I B_2 \end{array}\right] \\ &= \left[\begin{array}{c|c} \vec{b} & A_1 + B_2 \end{array}\right] \\ &= \left[\begin{array}{c|cc} 1 & 7 & 7 \\ -2 & 7 & 7 \end{array}\right]. \end{aligned}$$

Huomataan, että tulot ovat samoja.

6. Todista, että lineaarinen yhtälöryhmä $[A|\vec{b}]$ on konsistentti jos ja vain jos vektori $\vec{b}$ voidaan kirjoittaa lineaarikombinaationa kerroinmatriisin A sarakkeista.

   Muistellaan, että $[A|\vec{b}]$ on konsistentti, jos on olemassa vektori $\vec{x}$ siten, että $A\vec{x} = \vec{b}$. Matriisi A voidaan olettaa $(k \times n)$-matriisiksi. Kirjoitetaan A muotoon

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \cdots & a_{kn} \end{bmatrix}.$$

Matriisi A voidaan jakaa sarakkeisiin:

$$A = \left[\begin{array}{c|c|c|c} \overbrace{a_{11}}^{\vec{S}_1} & \overbrace{a_{12}}^{\vec{S}_2} & \cdots & \overbrace{a_{1n}}^{\vec{S}_n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \cdots & a_{kn} \end{array}\right].$$

Eli $A = [\vec{S}_1|\vec{S}_2|\cdots|\vec{S}_n]$. Nyt meidän on todistettava "jos ja vain jos" -lause, eli puretaan todistus osiksi. Oletetaan ensin, että $\vec{b}$ voidaan kirjoittaa lineaarikombinaationa A:n sarakkeista, ja todistetaan, että $[A|\vec{b}]$ on konsistentti. Eli oletetaan

$$\vec{b} = x_1\vec{S}_1 + x_2\vec{S}_2 + \cdots + x_n\vec{S}_n$$

joillakin $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$. Näin olleen

$$\begin{aligned} \vec{b} &= x_1 \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{k1} \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{k2} \end{bmatrix} + \cdots + x_n \begin{bmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{kn} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \\ \vdots \\ a_{k1}x_1 + a_{k2}x_2 + \cdots + a_{kn}x_n \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Hieman miettimällä nähdään tämän olevan sama kuin

$$= \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \cdots & a_{kn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix};$$

toisin sanoen

$$= A\vec{x},$$

jossa

$$\vec{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}.$$

Näin olleen systeemi $[A|\vec{b}]$ on konsistentti.

Oletamme nyt, että $[A|\vec{b}]$ on konsistentti ja todistamme, että $\vec{b}$ voidaan kirjoittaa muotoon $x_1\vec{S}_1 + x_2\vec{S}_2 + \cdots + x_n\vec{S}_n$ joillakin $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$. Meille riittää seurata edellistä päätelmää toiseen suuntaan. Yhtälöryhmä $[A|\vec{b}]$ on konsistentti, eli $\vec{b} = A\vec{x}$ jollain $\vec{x}$:llä. Kirjoitetaan

$$\vec{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}.$$

Sitten kirjoitetaan auki:

$$\begin{aligned}
\vec{b} = A\vec{x} &= \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \cdots & a_{kn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \\ \vdots \\ a_{k1}x_1 + a_{k2}x_2 + \cdots + a_{kn}x_n \end{bmatrix} \\
&= x_1 \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{k1} \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{k2} \end{bmatrix} + \cdots + x_n \begin{bmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{kn} \end{bmatrix} \\
&= x_1\vec{S}_1 + x_2\vec{S}_2 + \cdots + x_n\vec{S}_n,
\end{aligned}$$

joka riittää todistukseen.