

Matematiikan ja tilastotieteen laitos  
Lineaarialgebra ja matriisilaskenta I (Syksy 2009)

Harjoitus 2

Ratkaisuja (Timo Vuori)

4 sivua

korjattu ti 9.9.09

1. Määrätään seuraavien yhtälöiden ratkaisujoukot:

**Ratkaisu:**

a)  $2x_1 + 3x_2 = 5$

Yhtälön ratkaisuja ovat esim.

$$\bar{p} = (1, 1) \text{ ja } \bar{q} = (-2, 3).$$

Merkitään  $\bar{d} = \bar{q} - \bar{p} = (-3, 2)$ , jolloin yhtälön yleisen ratkaisun muodostavat suoran

$$\bar{x} = \bar{p} + t\bar{q},$$

b)  $4x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 1$

Yhtälön ratkaisuja ovat esim.

$$\bar{a} = (1, -1, 0), \bar{b} = (0, 1, -1) \text{ ja } \bar{c} = (-1, 1, 1).$$

Olkoon  $\bar{q} = \bar{b} - \bar{a} = (-1, 2, -1)$  ja

$$\bar{r} = \bar{c} - \bar{a} = (-2, 2, 1)$$

ja yhtälön yleinen ratkaisu on taso

$$\bar{x} = \bar{a} + s\bar{q} + t\bar{r},$$

$$= (1, -1, 0) + s(-1, 2, -1) + t(-2, 2, 1).$$

2. Olkoon  $k \neq 0$ . Tarkastellaan kahden yhtälön systeemiä

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \quad (1)$$

a) Alkeisrivioperaatio  $kR_1$  johtaa ekvivalenttiin systeemiin:  
Soveltamalla operaatiota  $kR_1$  j.y.o. systeemiin saadaan

$$ka_{11}x_1 + ka_{12}x_2 + \dots + ka_{1n}x_n = kb_1$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \quad (2)$$

Siis jos  $(x_1, \dots, x_n)$  on (1):n ratkaisu, on se myös (2):n ratkaisu. Toisaalta, soveltamalla operaatiota  $((1/k)R_1)$  ryhmään (2) nähdään, että (2):n ratkaisu on (1):n ratkaisu. Siis (1):n ja (2):n ratkaisut ovat ekvivalentit.

b) Operaatio  $R_2 + kR_1$  johtaa ekvivalenttiin systeemiin:  $R_2 + kR_1$  muuttaa (1):n muotoon

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1$$

$$(a_{21} + ka_{11})x_1 + (a_{22} + ka_{12})x_2 + \dots + (a_{2n} + ka_{1n})x_n = b_2 + kb_1 \quad (3)$$

Toisaalta  $R_2 + (-k)R_1$  muuttaa (3):n takaisin (1):ksi. Kuten a)-kohdassa, voidaan päätellä, että (1) ja (3) ovat ekvivalentit.

3. Mitkä seuraavista matriiseista ovat pelkistetyssä porrasmuodossa?

**Ratkaisu:**

RATKAISU 3. Matriisi

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

on pelkistetyssä porrasmuodossa.: (1) Nollarivejä ei ole (2) Nollasta eroavien rivien vasemmanpuolimmaisiin nollasta eroava alkio eli rivin johtava alkio on -1. (3) Toisen rivin johtava alkio on ensimmäisen rivin johtavan alkion oikealla puolella. (4) Johtavat alkioit ovat sarakkeidensa ainoat nollasta poikkeavat alkioit..

Matriisi

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

on pelkistetyssä porrasmuodossa: Nollarivit ovat alimpina - muitahan ei ole.

Matriisi

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

ei ole pelkistetyssä porrasmuodossa:

(3) 3. rivin johtava alkio on 2. rivin johtavan alkion vasemmalla puolella ( ja toinen ensimmäisen ).

Matriisi

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

ei ole pelkistetyssä porrasmuodossa:

(3) 2. rivin johtava alkio ei ole 1. rivin johtavan alkion oikealla puolella.

(4) 2., 3. ja 4. rivin johtavat alkioit eivät ole sarakkeidensa ainoat 0:sta poikkeavat alkioit.

4. Muutetaan matriisi

$$\begin{bmatrix} -2 & -4 & 7 \\ -3 & -6 & 10 \\ 1 & 2 & -3 \end{bmatrix}$$

pelkistettyyn porrasmuotoon alkeisrivioperaatioilla.

**Ratkaisu:**

$$\begin{bmatrix} -2 & -4 & 7 \\ -3 & -6 & 10 \\ 1 & 2 & -3 \end{bmatrix} \xrightarrow{1} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ -3 & -6 & 10 \\ -2 & -4 & 7 \end{bmatrix} \xrightarrow{2} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{3} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{4} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

- (1)  $R_1 \leftrightarrow R_3$   
 (2)  $R_2 + 3R_1, R_3 + 2R_1$   
 (3)  $R_3 - R_2$   
 (4)  $R_1 + 3R_2$

5.

$$\begin{aligned} 2w + 3x - y + 4z &= 0 \\ 3w - x + z &= 1 \\ 3w - 4x + y - z &= 2 \end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 & 4 & 0 \\ 3 & -1 & 0 & 1 & 1 \\ 3 & -4 & 1 & -1 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{1} \begin{bmatrix} 3 & -1 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & -1 & 4 & 0 \\ 3 & -4 & 1 & -1 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{2} \begin{bmatrix} 3 & -1 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & -1 & 4 & 0 \\ 0 & -3 & 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{3} \begin{bmatrix} 1 & -4 & 1 & -3 & 1 \\ 2 & 3 & -1 & 4 & 0 \\ 0 & -3 & 1 & -2 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{4} \begin{bmatrix} 1 & -4 & 1 & -3 & 1 \\ 0 & 11 & -3 & 10 & -2 \\ 0 & -3 & 1 & -2 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{5} \begin{bmatrix} 1 & -4 & 1 & -3 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 4 & 1 \\ 0 & -3 & 1 & -2 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{6}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -4 & 1 & -3 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 4 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 2 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{7} \begin{bmatrix} 1 & -4 & 1 & -3 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 4 & 1 \\ 0 & -2 & 2 & 4 & 4 \end{bmatrix} \xrightarrow{8} \begin{bmatrix} 1 & -4 & 1 & -3 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 8 & 5 \end{bmatrix} \xrightarrow{9}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 5 & 3 \\ 0 & 2 & 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 5/2 \end{bmatrix} \xrightarrow{10} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1/2 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 5/2 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

- (1)  $R_1 \leftrightarrow R_2$   
 (2)  $R_3 - R_1$   
 (3)  $R_1 - R_2$   
 (4)  $R_2 - 2R_1$   
 (5)  $R_2 + 3R_3$   
 (6)  $R_3 + R_2$   
 (7)  $2R_3$   
 (8)  $R_3 + R_2$   
 (9)  $R_1 + 2R_2,$   
 (1/2)  $R_3$   
 (10)  $R_1 - R_3,$   
 (1/2)  $R_2$

Merkitään  $z = t$ , jolloin

$$y + 4z = 5/2 \Rightarrow y = 5/2 - 4t$$

$$x + 2z = 1/2 \Rightarrow x = 1/2 - 2t$$

$$w + z = 1/2 \Rightarrow w = 1/2 - t$$

Tällöin

$$(w, x, y, z) = (1/2, 1/2, 5/2, 0) + t(-1, -2, -4, 1)$$

**6. Ratkaisu:**

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{1} \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{2} \begin{bmatrix} 3 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \\ \xrightarrow{3} \begin{bmatrix} 3 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{4} \begin{bmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 3 & 5 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \end{bmatrix} = B$$

(1)  $R_2 \leftrightarrow R_3$

(2)  $R_1 + 1R_3$ ,

(3)  $2R_3$

(4)  $R_2 + 2R_3$