Lineaarialgebra ja matriisilaskenta I, syksy 2009 Laskuharjoitus 5 (12.-16.10.)
Samuli Siltanen

1. Laske seuraavien matriisien käänteismatriisit Gaussin-Jordanin menetelmällä. Tarkista tulos kertolaskulla.

$$\text{(a)} \quad \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}, \qquad \text{(b)} \quad \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

2. Olkoon B matriisi kokoa 3×3. Merkitään B':lla sitä matriisia, joka syntyy matriisista B rivioperaation $R_3 + 2R_1$ seurauksena. Muodosta sellainen matriisi C, että $B' = CB$. Onko C kääntyvä? Miksi?

3. Tarkista lohkomatriisien kertolaskulla, että seuraavat yhtälöt ovat tosia:

$$\text{(a)} \quad \begin{bmatrix} A & B \\ 0 & D \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} A^{-1} & -A^{-1}BD^{-1} \\ 0 & D^{-1} \end{bmatrix},$$

$$\text{(b)} \quad \begin{bmatrix} I & B \\ C & I \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} (I-BC)^{-1} & -(I-BC)^{-1}B \\ -C(I-BC)^{-1} & I + C(I-BC)^{-1}B \end{bmatrix}.$$

(Voit olettaa, että kaikki tarvittavat käänteismatriisit ovat olemassa.)

4. Laske seuraavien matriisien käänteismatriisit Gaussin-Jordanin menetelmällä.

$$\text{(a)} \quad \begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 1 & -2 & -1 \\ 2 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \qquad \text{(b)} \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

5. (a) Todista: jos A on kääntyvä matriisi ja $AB = 0$, niin välttämättä $B = 0$.
   (b) Konstruoi sellaiset 3×3-matriisit $A \neq 0$ ja $B \neq 0$, että $AB = 0$.

6. Neliömatriisi A on *idempotentti*, jos $A^2 = A$.
   (a) Etsi kolme idempotenttia 2×2-matriisia.
   (b) Todista, että ainoa kääntyvä idempotentti $n \times n$-matriisi on identiteettimatriisi.