Lineaarialgebra ja matriisilaskenta I, syksy 2009 Laskuharjoitus 4 (5.10.-9.10.2009)
Samuli Siltanen

1. Olkoon A matriisi kokoa $m \times n$ ja $\vec{e}_i \in \mathbb{R}^m$ standardikantavektori kokoa $1 \times m$. Osoita, että $\vec{e}_i A$ on matriisin A rivi numero i.

2. Matriisi A on *symmetrinen*, jos $A = A^T$. Olkoon B mielivaltainen matriisi. Osoita, että matriisit BB^T ja $B^T B$ ovat hyvin määriteltyjä ja symmetrisiä.

3. Muodosta 6×6 matriisit $A = [a_{ij}]$ ja $B = [b_{ij}]$, jotka toteuttavat seuraavat ehdot:

$$a_{ij} = \begin{cases} i+j, & \text{jos } i \leq j, \\ 0, & \text{jos } i > j. \end{cases} \qquad b_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{jos } |i-j| \leq 1, \\ 0, & \text{jos } |i-j| > 1. \end{cases}$$

4. Olkoon $A = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$.

   (a) Osoita, että $A^2 = \begin{bmatrix} \cos 2\theta & -\sin 2\theta \\ \sin 2\theta & \cos 2\theta \end{bmatrix}$.

   (b) Todista induktiolla, että $A^n = \begin{bmatrix} \cos n\theta & -\sin n\theta \\ \sin n\theta & \cos n\theta \end{bmatrix}$, kun $n \geq 1$.

   Vihje: induktiotodistus on kaksivaiheinen. Ensimmäisessä vaiheessa osoitetaan, että väite pätee tapauksessa $n = 1$. Toisessa vaiheessa näytetään, että mikäli väite pätee tapauksessa $n - 1$, niin siitä seuraa väite tapauksessa n.

5. Olkoon A kääntyvä matriisi.

   (a) Osoita, että $(cA)^{-1} = \frac{1}{c}A^{-1}$, kun $c \in \mathbb{R}$ ja $c \neq 0$.

   (b) Osoita, että $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$.

6. Maatilalla on k kanaa ja p possua. Eläinten määristä tiedetään vain se, että jalkoja on yhteensä 38 ja päitä yhteensä 16.

   (a) Merkitse $\vec{x} = [k \quad p]^T$ ja kirjoita ongelma muotoon $A\vec{x} = \vec{b}$, missä A on 2×2-matriisi.

   (b) Laske (käsin, ei tietokoneella) käänteismatriisi A^{-1}.

   (c) Ratkaise ongelma kaavalla $\vec{x} = A^{-1}\vec{b}$.