

1. Olkoot  $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in \mathbb{R}^n$  ja  $c, d \in \mathbb{R}$ . Todista, että

$$\begin{aligned} c(\vec{u} + \vec{v}) &= c\vec{u} + c\vec{v}, \\ c(d\vec{u}) &= (cd)\vec{u}, \\ \vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) &= \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w}, \\ \vec{u} \cdot \vec{u} &\geq 0, \\ \vec{u} \cdot \vec{u} &= 0 \text{ jos ja vain jos } \vec{u} = 0. \end{aligned}$$

2. Tarkastellaan tasossa kulkevia suoria, jotka määräytyvät yhtälöistä

$$(a) x_2 = 3x_1 - 1, \quad (b) 3x_1 + 2x_2 = 5.$$

Kirjoita kumpikin suora vektorimuodossa  $\vec{x} = \vec{p} + t\vec{d}$ .

3. Tarkastellaan sitä tasoa avaruudessa  $\mathbb{R}^3$ , joka sisältää pisteet

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

Kirjoita kyseinen taso vektorimuodossa  $\vec{x} = \vec{p} + s\vec{u} + t\vec{v}$ .

4. Mitkä seuraavista yhtälöistä ovat lineaarisia? Miksi?

$$(a) \sqrt{2}x + \pi^2y - (\log \pi^3)z = 1, \quad (b) 4y + e^z = 6, \quad (c) x_1 + 2x_2 = 4 + x_4 - x_5.$$

5. Luennolla määriteltiin kolme alkeisrivioperaatiota (*elementary row operations*). Osoita, että kukin alkeisrivioperaatio voidaan kääntää (eli suorittaa takaperin).

6. Alla olevassa kuvassa ohuet viivat ovat pikselien reunoja ja paksut viivat kuvaavat röntgensäteitä. Pikselin sivun pituus on yksi. Ajatellaan, että kussakin pikselissä on tuntematon röntgensäteilyn vaimenemiskerroin  $x_j$ ,  $j = 1, 2, \dots, 9$ . (Voit numeroida pikselit haluamassasi järjestyksessä.) Kukin röntgensäde tuottaa mittausarvon  $m_k = \ell_{k1}x_1 + \ell_{k2}x_2 + \dots + \ell_{k9}x_9$ , missä  $1 \leq k \leq 6$  ja  $\ell_{kj}$  on sen matkan pituus, jonka säde numero  $k$  kulkee pikselissä numero  $j$ . (Voit numeroida myös röntgensäteet haluamassasi järjestyksessä.) Kirjoita mittaus lineaariseksi yhtälöryhmäksi muuttujille  $x_1, x_2, \dots, x_9$ .

