(*) $\quad |\vec{u}\cdot\vec{v}| \le \|\vec{u}\|\,\|\vec{v}\|$

Merk. $A = \|\vec{u}\|^2$ ja $B = |\vec{u}\cdot\vec{v}|$ ja $C = \|\vec{v}\|^2$

Määritellään $\alpha = 1$ jos $\vec{u}\cdot\vec{v} = |\vec{u}\cdot\vec{v}|$

ja $\alpha = -1$ jos $\vec{u}\cdot\vec{v} = -|\vec{u}\cdot\vec{v}|$. Silloin $B = \alpha\,\vec{u}\cdot\vec{v}$.

ja ~~Silloin~~ jokaiselle reaaliluvulle $r\in\mathbb{R}$ pätee

$$0 \le (\vec{u} - r\alpha\vec{v})\cdot(\vec{u} - r\alpha\vec{v}) = \vec{u}\cdot\vec{u} - 2r\alpha\,\vec{u}\cdot\vec{v} + r^2\,\vec{v}\cdot\vec{v}$$

$$= \|\vec{u}\|^2 - 2r\alpha\,\vec{u}\cdot\vec{v} + r^2\|\vec{v}\|^2$$

$$(**) \qquad = A - 2rB + r^2C$$

Jos $C = 0$ niin $\|\vec{v}\|^2 = 0$ joten $\vec{v} = \vec{0}$; edelleen $\vec{u}\cdot\vec{v} = \vec{u}\cdot\vec{0} = 0$ ja kaava (*) pätee.

Tarkastellaan tilannetta $C > 0$. Koska (**) pätee jokaisella $r\in\mathbb{R}$, erityisesti se pätee luvulla $r = \frac{B}{C}$.

Niin ollen $0 \le A - \frac{2B^2}{C} + \frac{B^2}{C}$ ja edelleen $0 \le AC - 2B^2 + B^2$ eli $B^2 \le AC$

$|\vec{u}\cdot\vec{v}|^2 \le \|\vec{u}\|^2\|\vec{v}\|^2$

$\Rightarrow$ (*)