Topologia I
Harjoitus 9
30.3. - 3.4. 2009

1. (11:3) Metrinen avaruus X on diskreetti, jos jokainen piste $a \in X$ on erakkopiste, ts. kaikki yksiöt $\{a\}$ ovat avoimia X:ssä. Millä ehdolla diskreetin avauuden X jono (x_n) suppenee?

2. Pidetän tunnettuna, että on olemassa bijektio $q : \mathbb{N} \to \mathbb{Q}$, missä $\mathbb{Q}$ on rationaalilukujen joukko, eli $\mathbb{Q} = \{q_n : n \in \mathbb{N}\}$ kun merkitään $q_n = q(n)$, $n \in \mathbb{N}$. Jos $x \in \mathbb{R}$ on mielivaltainen reaaliluku etsi sellainen jonon (q_n) osajono (q_{n_k}), että $q_{n_k} \to x$ kun $k \to \infty$ $\mathbb{R}$:n tavallisessa metriikassa. *Idea.* Perustele miten valitaan peräkkäin indeksejä $n_1 < n_2 < \ldots$ joille $|x - q_{n_k}| < \frac{1}{k}$ kaikilla $k \in \mathbb{N}$.

3. (11:10) Olkoon $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funktio $f_n(x) = \max\{0, x - n\}$ kun $x \in \mathbb{R}$ ja $n \in \mathbb{N}$. Tutki, suppeneeko funktiojono (f_n) $\mathbb{R}$:ssä (i) pisteittäin, (ii) tasaisesti. Tutki samat asiat myös, kun $\mathbb{R}$:ssä on $\{0, 1\}$-metriikka.

4. (11:12 oleellisesti) Olkoon X, Y metrisiä avaruuksia, $M \geq 1$ vakio sekä (f_n) jono M-bilipschitz kuvauksia $X \to Y$. Näytä: jos f_n suppenee pisteittäin kohti funktiota f joukossa X, niin myös f on M-bilipschitz kuvaus $X \to Y$. *Muistutus:* monisteen Lauseesta 11.12 on apua.

5. (11:14) Määritellään funktio $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ seuraavasti: $f(x, y) = 1$, kun $x^4 < y < x^2$, ja $f(x, y) = 0$ muissa pisteissä (x, y). Näytä:
(i) $\lim_{z \to \bar{0}, z \in L} f(z) = 0$ kaikilla origon lautta kulkevilla suorilla L,
(ii) raja-arvo $\lim_{z \to \bar{0}} f(z)$ ei ole olemassa.

6. (11:11) Olkoot (X, d) ja (Y, d') rajoitettuja metrisiä avaruuksia, ja olkoot $f_n : X \to Y$ jono kuvauksia, jotka suppenevat kohti kuvausta $f : X \to Y$ tasaisesti X:ssä. Olkoon $A \subset X$ osajoukko. Todista, että joukkojen $f_n A$ läpimitat $d'(f_n A)$ suppenevat kohti lukua $d'(fA)$ kun $n \to \infty$. *Ohje.* Olkoon $\varepsilon > 0$. Valitse aluksi tasaisen suppenemisen nojalla $n_0 \in \mathbb{N}$, jolle $d'(f_n(x), f(x)) < \varepsilon$ kaikilla $x \in X$ ja $n \geq n_0$. Arvioi erotusta $d'(f_n A) - d'(fA)$ ylöspäin ja alaspäin kun $n \geq n_0$.