Topologia I
Harjoitus 8
23.3. - 27.3. 2009

1. Olkoon $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ M-lipschitz kuvaus, missä $0 < M < \infty$ on vakio. Tutki, onko kuvaus

$$h(x) = (x, f(x)), \quad x \in \mathbb{R},$$

M'-bilipschitz $R \to \mathbb{R}^2$ jollakin vakiolla $M' \geq 1$.

2. (9:14) Olkoon $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ jatkuva. Osoita, että yhtälö $f(x, y) = (x, y+g(x))$ (missä $(x, y) \in \mathbb{R}^2$), toisin sanoen $f(z) = z + g(pr_1(z))e_2$ (missä $z \in \mathbb{R}^2$), määrittelee homeomorfismin $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, ja määrää käänteiskuvauksen f^{-1} lauseke. Näytä lisäksi, että jos g on M-lipschitz, niin f on $(M+1)$-bilipschitz (*ohje:* käänteiskuvauksen lausekkeesta on hyötyä).

3. (10:1) Olkoon $g(s, t) = \sqrt{|s - t|}$ kun $s, t \in \mathbb{R}$. Tarkista, että g on metriikka $\mathbb{R}$:ssä. Onko g (i) ekvivalentti, (ii) bilipschitz-ekvivalentti $\mathbb{R}$:n tavallisen metriikan kanssa? *Vihje.* Arvio $\sqrt{a + b} \leq \sqrt{a} + \sqrt{b}$ $(a, b \geq 0)$ tarvitaan g:n kolmioepäyhtälöä varten.

4. Olkoon $X =]0, \infty[$ ja $e(s, t) = |\frac{1}{s} - \frac{1}{t}|$, kun $s, t \in X$. Näytä: (i) e on metriikka X:ssä, (ii) e ei ole bilipschitz-ekvivalentti X:n tavallisen metriikan d kanssa, (iii) kuvaus f on homeomorfismi $(X, d) \to (X, e)$, missä $f(t) = \frac{1}{t}$ $(t \in X)$.

5. (osin 11:5) Tutki, suppenevatko seuraavat jonot (x_n) avaruudessa $\mathbb{R}^3$, missä on euklidinen normi.
(i) $x_n = (\frac{1}{n}, \frac{1}{e^n}, (-1)^n)$,
(ii) $x_n = (\frac{1}{n}, \frac{1}{e^n}, n)$,
(iii) $x_n = (\sin(1 + \frac{1}{n}), 1, \frac{1}{n^4})$.

6. (11:2) Olkoon X metrinen avaruus, $\emptyset \neq A \subset X$ osajoukko ja (x_n) jono A:ssa. Näytä, että jonon (x_n) jokainen kasautumisarvo kuuluu sulkeumaan $\overline{A}$.