

Topologia I
Harjoitus 6
9.3.-13.3. 2009

1. (7:2) Olkoon $\overline{B^2} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$. Tutki seuraavista joukoista A , mitkä niistä ovat avoimia joukossa $\overline{B^2}$:

(i) $A = \{(x, y) \in \overline{B^2} : xy > 0\}$,

(ii) $A = \{(x, y) \in \overline{B^2} : x \geq 0\}$.

2. (7:3 osa) Olkoon $B^2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 1\}$. Tutki seuraavista joukoista A , mitkä niistä ovat suljettuja joukossa B^2 :

(i) $A = \{(x, 0) \in B^2 : -1 < x < 1\}$,

(ii) $A = \{(x, y) \in B^2 : x + y > 0\}$.

Kielteisessä tapauksessa määritä A :n sulkeuma $\text{cl}_{B^2} A$ joukossa B^2 .

3. (7:6) Etsi esimerkki sellaisista joukoista $A, B, V \subset \mathbb{R}$, että $A \cup B = \mathbb{R}$, $V \cap A$ on avoin A :ssa, $V \cap B$ on avoin B :ssa, mutta V ei ole avoin \mathbb{R} :ssa.

4. (7:7) Okoon $A, B \subset X$ ja $\overline{A} \cap B = A \cap \overline{B} = \emptyset$. Näytä, että A ja B ovat avoimia ja suljettuja joukossa $A \cup B$.

5. (7:8) Joukkoperhe $\mathcal{D} \subset \mathcal{P}(X)$ on joukon X peite, jos

$$\bigcup \{A : A \in \mathcal{D}\} = X.$$

Olkoot X, Y metrisiä avaruuksia ja \mathcal{D} X :n sellainen peite, että jokainen joukko $A \in \mathcal{D}$ on avoin X :ssä. Osoita: jos $f : X \rightarrow Y$ on sellainen kuvaus että rajoittuma $f|_A$ on jatkuva jokaisella $A \in \mathcal{D}$, niin f on jatkuva X :ssä. *Vihje:* imitoi sopivasti lauseen 7.13 todistusta, mutta käytä lausetta 4.8 lauseen 6.13 sijasta (lauseille monisteen numerointi).

6. Olkoon X, Y metrisiä avaruuksia ja $f, g : X \rightarrow Y$ jatkuvia kuvauksia. Osoita, että joukko

$$A = \{x \in X : f(x) = g(x)\}$$

on suljettu X :ssä. Päätele: jos $B \subset X$ on edellä sellainen osajoukko, että rajoittumat $f|_B = g|_B$, niin myös $f|_{\overline{B}} = g|_{\overline{B}}$. *Vihje:* jos $x \in A^c$ etsi jatkuvuuden nojalla sellainen avoin kuula $B(x, r)$, että $fB(x, r) \cap gB(x, r) = \emptyset$.

Muistutus. Kurssin 2. jakson luennot alkavat ma 9.3. Muista että viikolla 9.3. - 13.3. on jo laskuharjoituksia (harjoitus 6). Tehtävien paperikopioita saa myös huoneesta C127.