Topologia I
Harjoitus 4
9.2.-13.2. 2009

1. (4:5) Olkoon $f : X \to Y$ M-Lipschitz ja $g : Y \to Z$ M'-Lipschitz. Tarkista, että yhdistetty kuvaus $g \circ f : X \to Z$ on MM'-Lipschitz.

2. Olkoon $f : [-5, 5] \to \mathbb{R}$ kuvaus $f(x) = x^3 + 6x + 2$. Etsi väliarvolauseen avulla sellainen vakio M, että f on M-Lipschitz kuvaus välillä $[-5, 5]$.

3. (4:3) Olkoon $C[0, 1]$ jatkuvien funktioiden $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ muodostama vektoriavaruus varustettuna max-metriikalla $d(f, g) = \max_{t\in[0,1]} |f(t) - g(t)|$. Näytä, että seuraavat kuvaukset $L : C[0, 1] \to \mathbb{R}$ ovat Lipschitz ja siis jatkuvia. (i) $L(f) = f(1/2)$, (ii) $L(f) = \int_0^1 f(t)dt$ (missä $f \in C[0, 1]$).

4. (3:10) Olkoon (X, d) metrinen avaruus ja $A = \{a \in X : a \text{ on erakkopiste}\}$. Näytä, että A on X:n avoin joukko.

5. (5:2) Näytä, että joukko

$$A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 - 1 < xyz < \sin(1 + y)\}$$

on avoin avaruudessa $\mathbb{R}^3$ (euklidinen metriikka). *Apu* Monisteen Lause 4.8.

6. (5:5) Olkoon (X, d) metrinen avaruus ja $A, B \subset X$ sellaisia epätyhjiä osajoukkoja että etäisyys $d(A, B) > 0$. Näytä, että $d(x, A) + 5d(x, B) > 0$ kaikilla $x \in X$, ja että yhtälön

$$f(x) = \frac{d(x, A)}{d(x, A) + 5d(x, B)}$$

määrittelemä kuvaus $f : X \to \mathbb{R}$ on jatkuva. Määritä lisäksi f:n suurin ja pienin arvo.

Huom.: Kurssin ensimmäinen kurssikoe on tiistaina 24.2 klo 13-15. Ilmoita luennoijalle jos kyseinen aika ei sovi ylivoimaisen esteen takia (vaihtoehtoinen koetilaisuus järjestetään tarvittaessa).