Topologia I
Harjoitus 3
2.2.-6.2. 2009

1. (3:1) Tutki, onko joukko $A \subset \mathbb{R}^2$ avoin, kun (a) $A = \{(x,y) : x \geq 1\}$, (b) $A = \{(x,y) : x^2 + 1 - y < 0\}$. *Vihje.* Kohdassa (b) saa käyttää kurssin Analyysi I tietoja jatkuvista funktioista.

2. (3:2) Olkoon $A \subset \mathbb{R}^2$ avoin joukko (euklidisessa metriikassa) ja $z \in \mathbb{R}^2 \setminus A$. Voiko $A \cup \{z\}$ olla avoin joukko? Perustele!

3. Olkoon $C[0,1]$ jatkuvien funktioiden $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ muodostama vektoriavaruus varustettuna max-metriikalla $d(f,g) = \max_{t\in[0,1]} |f(t) - g(t)|$. Tutki, onko joukko $A = \{f \in C[0,1] : f(t) > 0 \text{ kaikilla } t \in [0,1]\}$ avoin $C[0,1]$:ssa. [*Muista:* jatkuva funktio $g : [0,1] \to \mathbb{R}$ saa suurimman ja pienimmän arvonsa välillä $[0,1]$.]

4. (4:1) Olkoot X ja Y metrisiä avaruuksia, missä Y:ssä on diskreetti $\{0,1\}$-metriikka, sekä $f : X \to Y$ jatkuva kuvaus. Näytä, että jokaisella pisteellä $x \in X$ on ympäristö, missä f on vakiokuvaus.

5. (4:8) Olkoon $f(0,0) = 0$ ja $f(x,y) = \frac{xy^2}{x^2+y^4}$ kun $(x,y) \neq (0,0)$. Näytä, että funktio $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ on epäjatkuva origossa $(0,0)$, mutta että f:n rajoittuma jokaiselle origon kautta kulkevalle suoralle on jatkuva origossa. [Origon kautta kulkeva suora on muotoa $x = 0$ tai $y = cx$, missä $c \in \mathbb{R}$.]

6. (2:16) (*Kuratowskin upotuslause*) Olkoon (X,d) metrinen avaruus sekä $x_0 \in X$, $a \in X$. Määritellään funktio $f_a : X \to \mathbb{R}$ asettamalla

$$f_a(x) = d(x,a) - d(x,x_0), \quad x \in X.$$

(i) Osoita, että f_a on rajoitettu kuvaus. (ii) Olkoon $\varphi : X \to B(X,\mathbb{R})$ kuvaus $\varphi(a) = f_a$, $a \in X$, missä $B(X,\mathbb{R})$ on rajoitettujen funktioiden $X \to \mathbb{R}$ muodostama vektoriavaruus. Osoita, että

$$|\varphi(a) - \varphi(b)|_\infty = d(a,b), \quad a,b \in X,$$

missä $|\cdot|_\infty$ on sup-normi $B(X,\mathbb{R})$:ssa.
[*Ohje:* totea ensin, että $|\varphi(a) - \varphi(b)|_\infty \leq d(a,b)$, ja laske kuvauksen $\varphi(a) - \varphi(b)$ arvo pisteessä a.]

Huom.: Mallivastaukset löytyvät huoneesta C127 sekä kurssisivun linkiltä.