

Topologia I  
Harjoitus 2  
26.1.-30.1. 2009

1. Olkoon  $|x|_\infty = \max\{|x_1|, |x_2|\}$ , missä  $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ , tason  $\mathbb{R}^2$  max-normi (todettu normiksi luennoilla). Piirrä normia  $|\cdot|_\infty$  vastaavaan metriikkaan liittyvä suljettu kuula  $\overline{B}(a, 1)$ , kun  $a = (2, 1)$ .

2. Olkoon  $C[0, 1]$  jatkuvien funktioiden  $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  muodostama vektoriavaruus. Perustele miksi  $d(f, g) = |f(0) - g(0)|$ , kun  $f, g \in C[0, 1]$ , ei määrittele  $C[0, 1]$ :n metriikkaa. Mitkä metriikan ehdoista (M1), (M2) ja (M3) ovat voimassa  $d$ :lle?

3. (2:6) Olkoot  $d$  ja  $e$  metriikkoja joukossa  $X$ . Näytä, että myös  $d + e$  ja  $d \vee e$  ovat metriikkoja  $X$ :ssä. Edellä

$$(d \vee e)(x, y) = \max\{d(x, y), e(x, y)\}, \quad x, y \in X.$$

4. (2:9) Määritä tason joukkojen  $A = \{(x, y) : x^2 + 1 - y < 0\}$  ja  $B = \{(x, y) : y < 0\}$  välinen etäisyys  $d(A, B)$  (i) euklidisessa metrikassa, (ii) diskreetissä  $\{0, 1\}$ -metriikassa.

5. (1:6) (i) Olkoon  $E$  sisätuloavaruus. Osoita, että ns. *suunnikasyhtälö*

$$|x + y|^2 + |x - y|^2 = 2(|x|^2 + |y|^2)$$

on voimassa kaikilla  $x, y \in E$ .

(ii) Näytä (i)-kohdan perusteella ettei  $(\mathbf{R}^n, |\cdot|_1)$  ole sisätuloavaruus jos  $n \geq 2$ , missä  $|x|_1 = |x_1| + \dots + |x_n|$ , kun  $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$  (siis ettei normi  $|\cdot|_1$  voi olla peräisin mistään sisätulosta).

6. Olkoon  $A = \{p_n : n \in \mathbb{N}\}$ , missä  $p_n(t) = t^n$  kun  $t \in [0, 1]$  ja  $n \in \mathbb{N}$ . Määrä joukon  $A$  läpimitta  $d(A)$  metrisessä avaruudessa  $(C[0, 1], d)$ , missä  $d$  on sup-metriikka:

$$d(f, g) = \max\{|f(t) - g(t)| : t \in [0, 1]\}, \quad f, g \in C[0, 1].$$

(Analyysi I:n tietoja saa vapaasti käyttää.)

**Huom.** Laskuharjoitustehtävät löytyvät myös huoneesta C127 (paperikopiot) tai Topologia I:n kurssisivulta (linkki).