

Topologia I

Harjoitus 11 (viimeinen harjoitus)

20.4. - 24.4. 2009

1. (13:3) Tutki seuraavista joukoista $A_j \subset \mathbb{R}^2$, ovatko ne (i) kompakteja, (ii) täydellisiä: $A_1 = \{(x, y) : x^2 + 3y^2 \leq 4\}$, $A_2 = \{(x, y) : xy = 1\}$, $A_3 = \{(x, y) : x^2 + 3y^2 < 4\}$.

2. (i) Olkoon (X, d) metrinen avaruus, $r > 0$, ja $(x_n) \subset X$ sellainen jono, että $d(x_n, x_m) \geq r$ kaikilla $n \neq m$. Perustelee miksi X ei ole kompakti.

(ii) Etsi sellainen jono jatkuvia kuvauksia $(f_n) \subset C[0, 1]$, että $|f_n|_\infty = 1$ kaikilla $n \in \mathbb{N}$ ja $|f_n - f_m|_\infty = 1$ kaikilla $n \neq m$. Päättele, että suljettu kuula $B_{|\cdot|_\infty}(\bar{0}, 1)$ ei ole kompakti $C[0, 1]$:ssä. Tässä $|\cdot|_\infty$ on max-normi, ja $\bar{0}$ on nollafunktio. *Vihje*: Paloittain lineaarisia funktioita $f_n : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$.

3. (13:4) Olkoon X metrinen avaruus ja $A_1 \supset A_2 \supset \dots$ laskeva jono epätyhjiä kompakteja X :n osajoukkoja. Osoita, että leikkausjoukko $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n$ on epätyhjä ja kompakti. *Neuvo*: Aloita valitsemalla $x_n \in A_n$.

4. Olkoon $A \subset \mathbb{R}^2$ suljettu ja rajoitettu joukko. Näytä, että on olemassa sellainen $(c_1, c_2) \in A$, että $x_1 - x_2 \geq c_1 - c_2$ kaikilla $(x_1, x_2) \in A$. Piirrä kuva. *Vihje*: Kompaktisuus ja sopiva jatkuva kuvaus $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$.

5. (14:12) Olkoon $E = \{(x, y) : |x| < 2|y|\} \subset \mathbb{R}^2$. (i) Onko E yhtenäinen? (ii) Onko sulkeuma \bar{E} yhtenäinen?

6. (13:17 osa) Olkoon (X, d) kompakti metrinen avaruus ja $f : X \rightarrow X$ sellainen jatkuva kuvaus, että $d(f(x), f(y)) < d(x, y)$ kaikilla $x \neq y \in X$. Osoita, että f :llä on yksikäsitteinen kiintopiste $x_0 \in X$. *Ohje*. Totea Lauseiden 11.8 ja 11.12 avulla, että kuvaus $x \mapsto g(x) = d(x, f(x))$ on jatkuva $X \rightarrow [0, \infty[$. Lauseen 13.21 perusteella g saavuttaa miniminsä pisteessä $x_0 \in X$. Osoita lopuksi, että $f(x_0) = x_0$.

Muistutus: 2. kurssikoe on tiistaina 28.4. klo 13-15. Ilmoita luennoijalle (mieluiten myös sähköpostitse) jos kyseinen aika ei sovi esteen takia. Vaihtoehtoinen koetilaisuus järjestetään.

Koealue: luvut 7 - 14 (kohdat 14.1 - 14.20), sivut 54 - 115. Tuloavaruuksia (kohdat 10.8 - 10.15, 11.9 - 11.10, 13.16) **ei käsitelty** luennoilla.