

Topologia I

Harjoitus 10

6.4. - 17.4. 2009 (pääsiäisviikko)

1. (12:1) Olkoon (X, d) metrinen avaruus ja $(x_n) \subset X$ jono. Näytä: (x_n) on X :n Cauchy-jono jos ja vain jos läpimitta $d(A_n) \rightarrow 0$ kun $n \rightarrow \infty$, missä $A_n = \{x_j : j \geq n\}$, kun $n \in \mathbb{N}$.

2. (12:11) Olkoon X täydellinen ja $f : X \rightarrow Y$ bilipschitz-kuvaus. Näytä, että kuva fX on täydellinen.

3. (12:7) (i) Olkoon (X, d) täydellinen metrinen avaruus ja $A_1 \supset A_2 \supset \dots$ laskeva jono X :n suljettuja epätyhjiä osajoukkoja, joiden läpimitat $d(A_n) \rightarrow 0$ kun $n \rightarrow \infty$. Osoita, että on olemassa sellainen yksikäsitteinen piste $x \in X$, että $x \in A_n$ jokaisella $n \in \mathbb{N}$. *Neuvo:* kiinnitä piste $x_n \in A_n$ jokaisella $n \in \mathbb{N}$, ja totea että (x_n) on X :n Cauchy-jono. Tarkista, että jonon raja-arvo x on etsitty piste.

(ii) Etsi esimerkki \mathbb{R} :ssä, missä kohta (i) ei päde jos A_n on epätyhjä avoin joukko kaikilla $n \in \mathbb{N}$.

4. Haetaan yhtälön $x^3 - 7x + 1 = 0$ juuren likiarvo välillä $[0, 1]$ soveltamalla Banachin kiintopistelausetta funktioon $f(x) = (x^3 + 1)/7$. Totea, että f toteuttaa lauseen oletukset välillä $[0, 1]$. Kuinka suuri n tarvitaan jotta kiintopistelauseen virhearvion $d(x_n, a) \leq \frac{q^n}{1-q}d(x_0, x_1)$ perusteella (johdettu luennoilla) virhe on $< \frac{1}{100}$?

5. (12:15 osa) Tutki seuraavista funktioista $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ovatko ne tasaisesti jatkuvia \mathbb{R} :ssä:

- (i) $f(x) = \frac{x}{1+x^2}$,
- (ii) $f(x) = \sin(x^2)$,
- (iii) $f(x) = x^{1/3}$.

6. (13:2) Olkoon X metrinen avaruus ja $A, B \subset X$ kompakteja osajoukkoja. Näytä, että yhdiste $A \cup B$ on kompakti.

Muistuta: pääsiäisviikolla luentoja ma 6.4 ja ke 8.4, harjoituksia 6.4-8.4 ja 16.4. Pääsiäisen jälkeen luennot jatkuvat ma 20.4.

2. kurssikoe on tiistaina 28.4. klo 13-15. Ilmoita luennoijalle jos kyseinen aika ei sovi esteen takia (vaihtoehtoinen koetilaisuus järjestetään tarvittaessa).