Tilastollinen päättely, syksy 2013 - kevät 2014

Harjoitus 5

1. Tarkastellaan Poisson-mallia $Y_1, \dots, Y_n \sim P(\mu) \perp\!\!\!\perp$. Varmista, että su-estimaattori $\hat{\mu} = \overline{Y} = (Y_1 + \cdots + Y_n)/n$ on harhaton, ja laske sen varianssi. Onko $\hat{\mu}$ täystehokas?

2. Tarkastellaan ns. Poisson-regressiomallia: $Y_1, \dots, Y_n \perp\!\!\!\perp$ ja $Y_i \sim P(\lambda x_i)$, jossa $x_1, \dots, x_n$ ovat tunnettuja positiivisia lukuja (selittävän muuttujan arvoja). Konkreettisena esimerkkinä voidaan ajatella, että Y_i on johonkin tautiin kuolleiden lukumäärä populaatiossa, jonka koko on x_i.

   a) Muodosta tämän mallin log-uskottavuusfunktio ja johda parametrin λ suurimman uskottavuuden estimaattorille lauseke
   $$\hat{\lambda} = \frac{\sum_{i=1}^n Y_i}{\sum_{i=1}^n x_i}.$$

   b) Näytä, että $\hat{\lambda}$ on harhaton.

   c) Laske estimaattorin $\hat{\lambda}$ varianssi ja osoita, että se yhtyy informaatioepäyhtälön antamaan alarajaan.

3. Erään elektronisen komponentin kestoikä noudattaa eksponenttijakaumaa, jonka odotusarvo on θ/t, jossa $t > 0$ on komponentin käyttölämpötila ja $\theta > 0$ on tuntematon parametri. Parametrin θ estimoimiseksi testataan n komponenttia toisistaan riippumattomasti lämpötiloissa $t_1, \dots, t_n$ ja mitataan niiden kestoiät $Y_1, \dots, Y_n$. Osoita, että
   $$T = \sum_{i=1}^n Y_i \bigg/ \sum_{i=1}^n \frac{1}{t_i}$$
   on θ:n harhaton mutta ei täystehokas estimaattori.

   Vihje: Voit käyttää hyväksi seuraavia aputuloksia:
   $$\left(\sum_{i=1}^n a_i\right)^2 = n^2 \bar{a}^2$$
   $$\sum_{i=1}^n a_i^2 = \sum_{i=1}^n (a_i - \bar{a})^2 + n\bar{a}^2$$

4. Olkoot $Y_1, \ldots, Y_n \sim N(\theta, 1) \perp\!\!\!\perp$.

   a) Osoita, että $U(\boldsymbol{Y}) = \bar{Y}^2 - 1/n$ on funktion $g(\theta) = \theta^2$ harhaton estimaattori. Laske estimaatorin $U(\boldsymbol{Y})$ varianssi ja näytä, että se on suurempi kuin informaatioepäyhtälön antama alaraja.

   b) Funktion $g(\theta) = \theta^2$ suurimman uskottavuuden estimaattori $V(\boldsymbol{Y}) = \bar{Y}^2$ on a)-kohdan perusteella harhainen. Laske estimaatorin $V(\boldsymbol{Y})$ keskineliövirhe ja vertaa sitä estimaattorin $U(\boldsymbol{Y})$ keskineliövirheeseen.

5. Jatkoa edellisen harjoituksen tehtävään 5. Luentomonisteen perusteella säännöllisen mallin $f(\boldsymbol{y}; \theta)$ parametrin θ harhattoman estimaattorin T varianssille pätee, että

$$\mathrm{var}_\theta(T) \geq \frac{1}{i(\theta)} = \frac{1}{E[\{l'(\theta; \boldsymbol{y})\}^2]}.$$

   Olkoot $Y_1, \ldots, Y_n \sim \mathrm{Tas}(0, \theta) \perp\!\!\!\perp$. Tarkastellaan jälleen parametrin θ harhatonta estimaattoria $\check{\theta} = [(n+1)/n]\hat{\theta}$. Vertaa estimaattorin $\check{\theta}$ varianssia informaatioepäyhtälön antamaan alarajaan

$$\frac{1}{E[\{l'(\theta; \boldsymbol{y})\}^2]}$$

   ja kommentoi tulosta.