Tilastollinen päättely, syksy 2013 - kevät 2014

Harjoitus 4

Esimerkkiratkaisut

1. Oletetaan, että havainnot $Y_1, \dots, Y_n$ ovat riippumattomia ja noudattavat jakaumaa, jonka tiheysfunktio on

$$f(y; \alpha, \beta) = \begin{cases} \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)\left(\frac{y}{\beta}\right)^{\alpha-1} & \text{jos } y \in [0, \beta], \\ 0 & \text{jos } y \notin [0, \beta]. \end{cases}$$

jossa $\alpha > 0$ ja $\beta > 0$. Johda suurimman uskottavuuden estimaatit parametreille α ja β.

Ratk. Muodostetaan mallin yhteistiheysfunktio.

$$\begin{aligned} f_{\boldsymbol{Y}}(\boldsymbol{y}; \alpha, \beta) &= \prod_{i=1}^{n}\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)\left(\frac{y_i}{\beta}\right)^{\alpha-1} 1_{[0,\beta]}(y_i) = \frac{\alpha^n}{\beta^n}\frac{(\prod_{i=1}^{n} y_i)^{\alpha-1}}{\beta^{n\alpha-n}}\prod_{i=1}^{n} 1_{[0,\beta]}(y_i) \\ &= \frac{\alpha^n}{\beta^{n\alpha}}\left(\prod_{i=1}^{n} y_i\right)^{\alpha-1}\prod_{i=1}^{n} 1_{[0,\beta]}(y_i). \end{aligned}$$

Tulo $\prod_{i=1}^{n} 1_{[0,\beta]}(y_i)$ saa arvon yksi täsmälleen silloin kun $0 < y_1 < \beta, \cdots, 0 < y_n < \beta$ eli kun $y_{(1)} = \min\{y_1, \dots, y_n\} \in [0, \infty]$ ja $y_{(n)} = \max\{y_1, \dots, y_n\} \in [0, \beta]$.

Mallin yhteistiheysfunktio saadaan nyt muotoon

$$f_{\boldsymbol{Y}}(\boldsymbol{y}; \alpha, \beta) = \frac{\alpha^n}{\beta^{n\alpha}}\left(\prod_{i=1}^{n} y_i\right)^{\alpha-1} 1_{[0,\infty]}(y_{(1)}) 1_{[0,\beta]}(y_{(n)}).$$

Asetetaan $c(\boldsymbol{y}) = (\prod_{i=1}^{n} y_i)(1_{[0,\infty]}(y_{(1)}))^{-1}$. Tällöin mallia vastaavaksi uskottavuusfunktioksi saadaan

$$\begin{aligned} L(\alpha, \beta; \boldsymbol{y}) &= c(\boldsymbol{y}) f_{\boldsymbol{Y}}(\boldsymbol{y}; \alpha, \beta) = \frac{\alpha^n}{\beta^{n\alpha}}\left(\prod_{i=1}^{n} y_i\right)^{\alpha} 1_{[0,\beta]}(y_{(n)}) \\ &= \begin{cases} \frac{\alpha^n}{\beta^{n\alpha}}\left(\prod_{i=1}^{n} y_i\right)^{\alpha}, & \text{kun } \beta \geq y_{(n)}, \\ 0, & \text{kun } \beta < y_{(n)}, \end{cases} \end{aligned}$$

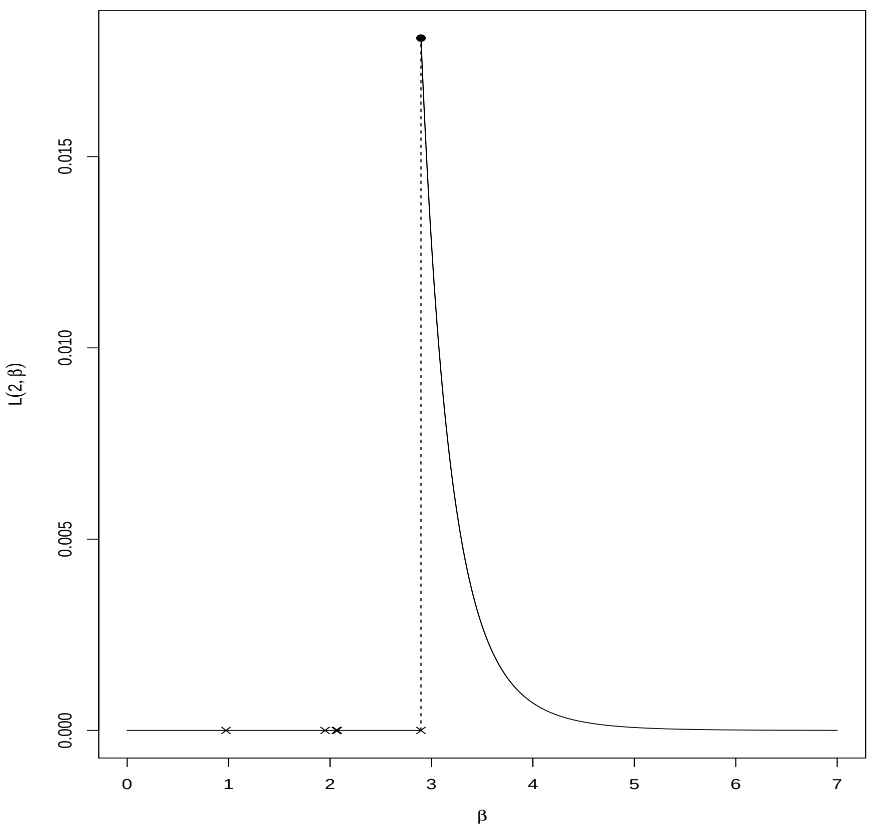
joten logaritminen uskottavuusfunktio on

$$\begin{aligned} l(\alpha, \beta; \boldsymbol{y}) &= n\log(\alpha) - n\alpha\log(\beta) + \alpha\sum_{i=1}^{n}\log(y_i) + \log(1_{[0,\beta]}(y_{(n)})) \\ &= \begin{cases} n\log(\alpha) - n\alpha\log(\beta) + \alpha\sum_{i=1}^{n}\log(y_i), & \text{kun } \beta \geq y_{(n)}, \\ -\infty, & \text{kun } \beta < y_{(n)}. \end{cases} \end{aligned}$$

Lasketaan logaritmisen uskottavuusfunktion derivaatat parametrien α ja β suhteen:

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial\alpha}l(\alpha,\beta;\boldsymbol{y}) &= \frac{n}{\alpha} - n\log(\beta) + \sum_{i=1}^{n}\log(y_i), \quad \text{kun } \beta \geq y_{(n)} \\ \frac{\partial}{\partial\beta}l(\alpha,\beta;\boldsymbol{y}) &= -\frac{n\alpha}{\beta}, \quad \text{kun } \beta \geq y_{(n)}\end{aligned}$$

Jälkimmäinen osittaisderivaatta on aina negatiivinen, joten (parametrin α arvon ollessa α_0) $L_{\alpha_0}(\beta) = L(\alpha_0,\beta)$ on aidosti laskeva ja positiivinen, kun $\beta \geq y_{(n)}$ ja nolla, kun $\beta < y_{(n)}$ (katso kuva 1). Parametrin β suurimman uskottavuuden



Kuva 1: Uskottavuusfunktio β:n funktiona, kun $n = 5$ ja $\alpha = 2$.

estimaatti on selvästi $\hat{\beta} = y_{(n)}$. Asetetaan seuraavaksi osittaisderivaatta $\partial l/\partial\alpha$ nollaksi, sijoitetaan saatuun yhtälöön $\beta = y_{(n)}$ ja ratkaistaan parametrin α suhteen.

$$\frac{n}{\alpha} - n\log(y_{(n)}) + \sum_{i=1}^{n}\log(y_i) = 0 \quad \Rightarrow \quad \alpha = \frac{1}{\log(y_{(n)}) - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\log(y_i)}$$

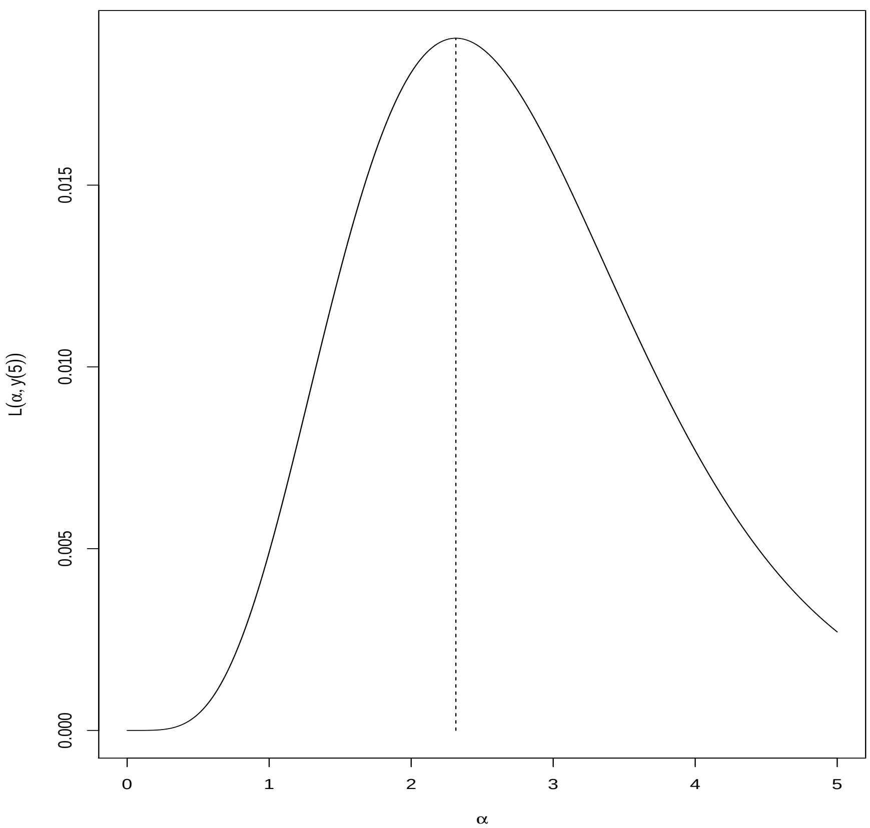
Kyseessä on suurimman uskottavuuden estimaatti, koska

$$\frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} l(\alpha, y_{(n)}; \boldsymbol{y}) \quad = \quad -\frac{n}{\alpha^2} < 0 \quad \text{kaikilla } \alpha > 0.$$

Parametrien α ja β suurimman uskottavuuden estimaatit ovat siis

$$\hat{\alpha} \quad = \quad \frac{1}{\log(y_{(n)}) - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \log(y_i)} \quad \text{ja} \quad \hat{\beta} = y_{(n)}.$$

Kuvassa 2 on esimerkki uskottavuusfunktion kuvaajasta, kun $n = 5$ ja $\beta = \hat{\beta} = y_{(5)}$.



Kuva 2: Uskottavuusfunktio α:n funktiona, kun $n = 5$ ja $\beta = \hat{\beta} = y_{(5)}$.

2. Hernekasvit luokitellaan niiden tuottamien herneiden mukaan yhtäältä muodon puolesta (pyöreä tai särmikäs) ja toisaalta värin puolesta (keltainen tai vihreä). Näin hernekasvit jakautuvat neljään luokkaan: PK, PV, SK ja SV. Niiden esiintymistodennäköisyydet ovat genetiikan mukaan vastaavasti $\alpha\beta$, $\alpha(1-\beta)$, $(1-\alpha)\beta$ ja $(1-\alpha)(1-\beta)$, jossa $0 < \alpha < 1$ ja $0 < \beta < 1$.

   Parametrien α ja β estimoimiseksi kasvatettiin sata (toisistaan riippumatonta) kasvia, jolloin havaittiin, että ne jakautuivat em. luokkiin seuraavasti:

Luokka:	PK	PV	SK	SV
Havaintoja:	52	21	17	10

   a) Ilmoita näitä havaintoja vastaava uskottavuusfunktio ja log-uskottavuusfunktio sekä suurimman uskottavuuden estimaatti $(\hat{\alpha}, \hat{\beta})$.

   b) Ovatko tarkasteltavan mallin parametrit α ja β ortogonaaliset? [Vrt. monisteen kohta 2.4.6]

Ratk. Olkoon $\boldsymbol{Y} = (Y_1, \ldots, Y_n)$ kasvatettujen kasvien tyyppejä kuvaava riippumattomien samoin jakautuneiden satunnaismuuttujien muodostama vektori. Satunnaismuuttujan Y_i ptf on

$$\begin{aligned} f_{Y_i}(y_i; \alpha, \beta) &= (\alpha\beta)^{1_{PK}(y_i)}(\alpha(1-\beta))^{1_{PV}(y_i)}((1-\alpha)\beta)^{1_{SK}(y_i)}((1-\alpha)(1-\beta))^{1_{SV}(y_i)} \\ &= \alpha^{1_{PK}(y_i)+1_{PV}(y_i)}\beta^{1_{PK}(y_i)+1_{SK}(y_i)}(1-\alpha)^{1_{SK}(y_i)+1_{SV}(y_i)}(1-\beta)^{1_{PV}(y_i)+1_{SV}(y_i)}, \end{aligned}$$

jossa $Y_i \in \{PK, PV, SK, SV\}$. Tilastollinen malli voidaan kirjoittaa muotoon

$$f_{\boldsymbol{Y}}(\boldsymbol{y}; \alpha, \beta) = g(\boldsymbol{y}) \prod_{i=1}^{n} f_{Y_i}(y_i; \alpha, \beta) = \alpha^{F_{PK}+F_{PV}} \beta^{F_{PK}+F_{SK}} (1-\alpha)^{F_{SK}+F_{SV}} (1-\beta)^{F_{PV}+F_{SV}},$$

jossa $F_k = \sum_{i=1}^{n} 1_k(y_i)$ on luokan k esiintymisfrekvenssi, $k \in \{PK, PV, SK, SV\}$ ja $g(\boldsymbol{y})$ on ns. multinomikerroin, joka ei riipu arvioitavista parametreista. Siis voimme valita uskottavuusfunktioksi $L(\alpha, \beta; \boldsymbol{y}) = f_{\boldsymbol{Y}}(\boldsymbol{y}; \alpha, \beta)/g(\boldsymbol{y})$. Tällöin log-uskottavuusfunktio on

$$\begin{aligned} l(\alpha, \beta; \boldsymbol{y}) &= (F_{PK} + F_{PV}) \log(\alpha) + (F_{PK} + F_{SK}) \log(\beta) \\ &\quad + (F_{SK} + F_{SV}) \log(1-\alpha) + (F_{PV} + F_{SV}) \log(1-\beta). \end{aligned}$$

Tämän funktion 1. kertaluvun osittaisderivaatat ovat

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial\alpha} l(\alpha, \beta; \boldsymbol{y}) &= \frac{F_{PK} + F_{PV}}{\alpha} - \frac{F_{SK} + F_{SV}}{1-\alpha}, \\ \frac{\partial}{\partial\beta} l(\alpha, \beta; \boldsymbol{y}) &= \frac{F_{PK} + F_{SK}}{\beta} - \frac{F_{PV} + F_{SV}}{1-\beta}. \end{aligned}$$

Nämä ovat molemmat nollia täsmälleen silloin kun

$$\begin{aligned}\alpha &= \frac{F_{PK} + F_{PV}}{n} \\ \beta &= \frac{F_{PK} + F_{SK}}{n}. \end{aligned} \tag{1}$$

Selvittääksemme ääriarvon laadun muodostamme 2. kertaluvun derivaatoista muodostuvan ns. Hessen matriisin $\boldsymbol{H}(\alpha, \beta)$

$$\begin{aligned}\boldsymbol{H}(\alpha, \beta) &= \begin{pmatrix} \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} l(\alpha, \beta; \boldsymbol{y}) & \frac{\partial^2}{\partial \alpha \partial \beta} l(\alpha, \beta; \boldsymbol{y}) \\ \frac{\partial^2}{\partial \beta \partial \alpha} l(\alpha, \beta; \boldsymbol{y}) & \frac{\partial^2}{\partial \beta^2} l(\alpha, \beta; \boldsymbol{y}) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -\frac{F_{PK}+F_{PV}}{\alpha^2} - \frac{F_{SK}+F_{SV}}{(1-\alpha)^2} & 0 \\ 0 & -\frac{F_{PK}+F_{SK}}{\beta^2} - \frac{F_{PV}+F_{SV}}{(1-\beta)^2} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Hessen matriisiksi saatiin diagonaalimatriisi, jonka kaikki diagonaaliarvot ovat negatiivisia. Hessen matriisi on nyt negatiivisesti definiitti (erityisesti ääriarvokohdan ympäristössä) ja ääriarvokohta on näinollen (paikallinen) maksimi; ja koska muita ääriarvokohtia ei ole niin globaali maksimi. Näinollen suurimman uskottavuuden estimaatti saadaan kaavasta (1).

(Huom! Diagonaalimatriisi, jonka kaikki diagonaaliarvot ovat positiivia, on positiivisesti definiitti. Jos taas kaikki diagonaaliarvot ovat negatiivisia, niin kyseessä on negatiivisesti definiitti matriisi)

(a) Sijoittamalla tehtävässä annetut tulokset $F_{PK} = 52$, $F_{PV} = 21$, $F_{SK} = 17$ ja $n = 100$ saamme kaavasta (1)

$$\hat{\alpha} = \frac{52 + 21}{100} = 0.73 \quad \text{ja} \quad \hat{\beta} = \frac{52 + 17}{100} = 0.69.$$

(b) Nähdään, että kaikilla $\alpha, \beta \in (0, 1)$ on voimassa

$$i_{2,1}(\alpha, \beta) = i_{1,2}(\alpha, \beta) = \mathrm{E}\left[-\frac{\partial^2}{\partial \alpha \partial \beta} l(\alpha, \beta; \boldsymbol{Y}) \right] = \mathrm{E}\left[-0 \right] = 0.$$

Fisherin informaatiomatriisi on siis lävistäjämatriisi ja näinollen parametrit α ja β ovat ortogonaaliset.

3. Tarkastellaan toistokoemallia $Y_1, \ldots, Y_n \sim B(\theta) \perp\!\!\!\perp$. Totea, että suurimman uskottavuuden estimaattori $\hat{\theta} = (Y_1 + \cdots + Y_n)/n$ on harhaton: $E_\theta(\hat{\theta}) = \theta$ kaikilla $\theta \in [0,1]$, ja laske sen varianssi $\mathrm{var}(\hat{\theta})$. Palauta mieleen tämän mallin Fisherin informaatio $i(\theta)$. Mikä yhteys sillä on em. varianssiin?

   Ratk. Lasketaan suurimman uskottavuuden estimaattorin odotusarvo ja varianssi:

$$\mathrm{E}(\hat{\theta}) = \mathrm{E}\left((Y_1 + \cdots + Y_n)/n\right) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \mathrm{E}(Y_i) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \theta = \theta \ \forall \theta \in [0,1],$$

   joten estimaattori on harhaton.

$$\mathrm{Var}(\hat{\theta}) = \mathrm{Var}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} Y_i\right) \overset{\perp\!\!\!\perp}{=} \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n} \mathrm{Var}(Y_i) = \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n} \theta(1-\theta) = \frac{\theta(1-\theta)}{n}.$$

   Luentomonisteen esimerkin 2.4.5 perusteella tämän mallin Fisherin informaatio on

$$i(\theta) = \frac{n}{\theta(1-\theta)},$$

   joten

$$\mathrm{Var}(\hat{\theta}) = \frac{1}{i(\theta)}.$$

4. Jatkoa edellisen harjoituksen tehtävälle 4. Olkoot $Y_1, \ldots, Y_n \perp\!\!\!\perp$ ja $Y_i \sim N(\beta x_i, \sigma_0^2)$, jossa $x_1, \ldots, x_n$ ovat tunnettuja lukuja ja $\sigma_0^2 > 0$ on tunnettu.

   (a) Osoita, että parametrin β suurimman uskottavuuden estimaattori $\hat{\beta}$ on harhaton β:n estimaattori ja laske sen varianssi. Mikä yhteys $\hat{\beta}$:n varianssilla on tämän mallin Fisherin informaatioon $i(\beta)$?

   (b) Osoita, että estimaattorit $T_1 = \sum_{i=1}^n Y_i / \sum_{i=1}^n x_i$ ja $T_2 = [\sum_{i=1}^n (Y_i/x_i)]/n$ ovat myös harhattomia β:n estimaattoreita ja laske niiden varianssit. Vertaa saatuja variansseja suurimman uskottavuuden estimaattorin varianssiin.

   Ratk.

   (a) Lasketaan parametrin β suurimman uskottavuuden estimaattorin odotusarvo ja varianssi.

$$\begin{aligned}\mathrm{E}(\hat{\beta}) &= \mathrm{E}\left[\frac{\sum_{i=1}^n Y_i x_i}{\sum_{i=1}^n x_i^2}\right] = \frac{\sum_{i=1}^n \mathrm{E}(Y_i) x_i}{\sum_{i=1}^n x_i^2} = \frac{\sum_{i=1}^n \beta x_i x_i}{\sum_{i=1}^n x_i^2} = \frac{\sum_{i=1}^n \beta x_i^2}{\sum_{i=1}^n x_i^2} \\ &= \frac{\sum_{i=1}^n x_i^2}{\sum_{i=1}^n x_i^2}\beta = \beta \quad \forall \beta \in \mathbb{R},\end{aligned}$$

joten $\hat{\beta}$ on parametrin β harhaton estimaattori.

$$\begin{aligned}\operatorname{Var}(\hat{\beta}) &= \operatorname{Var}\left[\frac{\sum_{i=1}^n Y_i x_i}{\sum_{i=1}^n x_i^2}\right] \overset{\perp\!\!\!\perp}{=} \frac{\sum_{i=1}^n \operatorname{Var}(Y_i) x_i^2}{(\sum_{i=1}^n x_i^2)^2} = \frac{\sum_{i=1}^n \sigma_0^2 x_i^2}{(\sum_{i=1}^n x_i^2)^2} \\ &= \frac{\sigma_0^2 \sum_{i=1}^n x_i^2}{(\sum_{i=1}^n x_i^2)^2} = \frac{\sigma_0^2}{\sum_{i=1}^n x_i^2}\end{aligned}$$

Edellisen harjoituksen tehtävän 4 perusteella tämän mallin Fisherin informaatio on

$$i(\beta) = \frac{\sum_{i=1}^n x_i^2}{\sigma_0^2},$$

joten

$$\operatorname{Var}(\hat{\beta}) = \frac{1}{i(\beta)}.$$

(b) Lasketaan estimaattorin T_1 odotusarvo ja varianssi.

$$\begin{aligned}\operatorname{E}(T_1) &= \operatorname{E}\left[\frac{\sum_{i=1}^n Y_i}{\sum_{i=1}^n x_i}\right] = \frac{\sum_{i=1}^n \operatorname{E}(Y_i)}{\sum_{i=1}^n x_i} = \frac{\sum_{i=1}^n \beta x_i}{\sum_{i=1}^n x_i} \\ &= \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{\sum_{i=1}^n x_i}\beta = \beta \quad \forall \beta \in \mathbb{R},\end{aligned}$$

joten T_1 on parametrin β harhaton estimaattori.

$$\begin{aligned}\operatorname{Var}(T_1) &= \operatorname{Var}\left[\frac{\sum_{i=1}^n Y_i}{\sum_{i=1}^n x_i}\right] \overset{\perp\!\!\!\perp}{=} \frac{\sum_{i=1}^n \operatorname{Var}(Y_i)}{(\sum_{i=1}^n x_i)^2} = \frac{\sum_{i=1}^n \sigma_0^2}{(\sum_{i=1}^n x_i)^2} = \frac{n\sigma_0^2}{(\sum_{i=1}^n x_i)^2} \\ &= \frac{n\sigma_0^2}{(n\bar{x})^2} = \frac{\sigma_0^2}{n\bar{x}^2}.\end{aligned}$$

Koska $\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 = \sum_{i=1}^n x_i^2 - n\bar{x}^2 \geq 0$, niin

$$\sum_{i=1}^n x_i^2 \geq n\bar{x}^2. \tag{2}$$

Tuloksesta (2) seuraa, että

$$\operatorname{Var}(\hat{\beta}) = \frac{\sigma_0^2}{\sum_{i=1}^n x_i^2} \leq \frac{\sigma_0^2}{n\bar{x}^2} = \operatorname{Var}(T_1),$$

jossa yhtäsuuruus on voimassa ainoastaan silloin, kun $x_1 = \cdots = x_n$.

Lasketaan seuraavaksi estimaattorin T_2 odotusarvo ja varianssi.

$$\begin{aligned}\operatorname{E}(T_2) &= \operatorname{E}\left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \frac{Y_i}{x_i}\right] = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \frac{\operatorname{E}(Y_i)}{x_i} \\ &= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \frac{\beta x_i}{x_i} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \frac{x_i}{x_i}\beta = \beta \quad \forall \beta \in \mathbb{R},\end{aligned}$$

joten T_2 on parametrin β harhaton estimaattori.

$$\begin{aligned}\mathrm{Var}(T_2) &= \mathrm{Var}\left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{Y_i}{x_i}\right] \overset{\perp\!\!\!\perp}{=} \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}\frac{\mathrm{Var}(Y_i)}{x_i^2} = \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}\frac{\sigma_0^2}{x_i^2} \\ &= \frac{\sigma_0^2}{n^2}\sum_{i=1}^{n} x_i^{-2}\end{aligned}$$

Varianssien $\mathrm{Var}(\hat{\beta})$ ja $\mathrm{Var}(T_2)$ vertailussa voidaan käyttää hyväksi Cauchy-Schwarzin epäyhtälöä

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\right)^2 \leq \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} b_i^2\right), \tag{3}$$

jossa yhtäsuuruus pätee ainoastaan silloin, jos $b_i = c \cdot a_i$, $i = 1, \ldots, n$, jollain skalaarivakiolla c. Jos $a_i = x_i$ ja $b_i = x_i^{-1}$, niin Cauchy-Schwarzin epäyhtälön perusteella saadaan

$$\left(\sum_{i=1}^{n} x_i x_i^{-1}\right)^2 \leq \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^{-2}\right) \Leftrightarrow \left(\sum_{i=1}^{n} 1\right)^2 \leq \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^{-2}\right)$$
$$\Leftrightarrow n^2 \leq \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^{-2}\right) \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \geq n^2 \Big/ \sum_{i=1}^{n} x_i^{-2},$$

jossa yhtäsuuruus pätee ainoastaan silloin, jos $x_1 = \cdots = x_n$. Nyt saadaan tulos

$$\mathrm{Var}(\hat{\beta}) = \frac{\sigma_0^2}{\sum_{i=1}^{n} x_i^2} \leq \frac{\sigma_0^2}{n^2 \Big/ \sum_{i=1}^{n} x_i^{-2}} = \frac{\sigma_0^2}{n^2}\sum_{i=1}^{n} x_i^{-2} = \mathrm{Var}(T_2)$$

Verrataan vielä estimaattorien T_1 ja T_2 variansseja keskenään.

$$\mathrm{Var}(T_2) - \mathrm{Var}(T_1) = \frac{\sigma_0^2}{n^2}\sum_{i=1}^{n} x_i^{-2} - \frac{\sigma_0^2}{n\bar{x}^2} = \frac{\sigma_0^2}{n^2\bar{x}^2}\left(\bar{x}^2\sum_{i=1}^{n} x_i^{-2} - n\right)$$
$$\overset{(2)}{\geq} \frac{\sigma_0^2}{n^2\bar{x}^2}\left[\bar{x}^2 n\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^{-1}\right)^2 - n\right] = \frac{\sigma_0^2}{n^2\bar{x}^2}\left[\frac{n}{n^4}\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^{-1}\right)^2 - n\right]$$
$$= \frac{\sigma_0^2}{n^2\bar{x}^2}\left[\frac{n}{n^4}\left(\sum_{i=1}^{n} x_i \sum_{j=1}^{n} x_j^{-1}\right)^2 - n\right] \overset{(*)}{\geq} \frac{\sigma_0^2}{n^2\bar{x}^2}\left[\frac{n}{n^4}\left(n^2\right)^2 - n\right] = 0,$$

joten $\mathrm{Var}(T_2) \geq \mathrm{Var}(T_1)$

(*) Cauchy-Schwarzin epäyhtälön (3) perusteella

$$\sum_{i=1}^{n} x_i \sum_{j=1}^{n} x_j^{-1} = \sum_{i=1}^{n}(x_i^{1/2})^2 \sum_{j=1}^{n}(x_j^{-1/2})^2 \geq \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^{1/2} x_i^{-1/2}\right)^2 = n^2.$$

5. Mallissa $Y_1, \ldots, Y_n \sim \text{Tas}(0, \theta) \perp\!\!\!\perp$ on su-estimaattoriksi saatu $\hat{\theta} = \max(Y_1, \ldots, Y_n)$ (ks. luentojen kohta 2.2.8).

   a) Muodosta $\hat{\theta}$:n kertymäfunktio F lähtien havainnosta

   $$P\{\hat{\theta} \leq y\} = P\{Y_1 \leq y\} \cdots P\{Y_n \leq y\}$$

   ja derivoi siitä tiheysfunktio $f = F'$.

   b) Laske $\hat{\theta}$:n odotusarvo ja totea, että $\hat{\theta}$ on harhainen mutta asymptoottisesti harhaton.

   c) Laske $\hat{\theta}$:n varianssi ja keskineliövirhe $E[(\hat{\theta} - \theta)^2]$ ja vertaa jälkimmäistä momenttimenetelmän antaman harhattoman estimaattorin $\tilde{\theta} = 2\overline{Y}$ (luentojen kohta 3.3.3) varianssiin. Kumpi estimaattori on parempi?

   d) Olisiko $\check{\theta} = [(n+1)/n]\hat{\theta}$ hyvä estimaattori? [Monisteen harjoitustehtävä 3.10]

Ratk.

a) Tunnetusti $\hat{\theta} = \max\{Y_1, \ldots, Y_n\} \leq y$, jos ja vain jos $Y_i \leq y$ kaikilla $i = 1, \ldots, n$. Siten riippumattomuuden nojalla

$$F(y) = P(\hat{\theta} \leq y) = P(Y_1 \leq y, \ldots, Y_n \leq y) = P(Y_1 \leq y) \cdots P(Y_n \leq y).$$

Koska kaikilla $i = 1, \ldots, n$

$$P(Y_i \leq y) = \begin{cases} 0, & y \in (-\infty, 0], \\ \theta^{-1} y, & y \in (0, \theta), \\ 1, & y \in [\theta, \infty), \end{cases}$$

niin

$$F(y) = \begin{cases} 0, & y \in (-\infty, 0], \\ \theta^{-n} y^n, & y \in (0, \theta), \\ 1, & y \in [\theta, \infty). \end{cases}$$

Derivoimalla saadaan siis

$$f(y) = F'(y) = \begin{cases} 0, & y \in (-\infty, 0], \\ \theta^{-n} n y^{n-1}, & y \in (0, \theta), \\ 0, & y \in [\theta, \infty). \end{cases}$$

Koska tiheysfunktiota f käytetään ainoastaan integraaleissa, ei haittaa että F' ei ole määritelty pisteissä 0 ja θ. Itse asiassa voidaan asettaa $f(0) := f(\theta) := 0$, jolloin $f(y) = \theta^{-n} n y^{n-1} 1_{(0,\theta)}(y),\ y \in \mathbb{R}$.

b) Suoralla laskulla saadaan

$$E(\hat{\theta}) \;=\; \int_{-\infty}^{\infty} yf(y)dy = \frac{n}{\theta^n}\int_0^{\theta} y^n dy = \frac{n}{n+1}\cdot\frac{\theta^{n+1}}{\theta^n} = \frac{n}{n+1}\theta, \quad \theta > 0.$$

Estimaattori $\hat{\theta}$ on siis harhainen mutta asymptoottisesti harhaton, koska

$$\lim_{n\to\infty} E(\hat{\theta}) = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1}\theta = \theta.$$

c) Lasketaan ensin $\hat{\theta}$:n toinen momentti:

$$E(\hat{\theta}^2) = \int_{-\infty}^{\infty} y^2 f(y)dy = \frac{n}{\theta^n}\int_0^{\theta} y^{n+1} dy = \frac{n}{n+2}\cdot\frac{\theta^{n+2}}{\theta^n} = \frac{n}{n+2}\theta^2.$$

Siten $\hat{\theta}$:n varianssi on

$$Var(\hat{\theta}) = E(\hat{\theta}^2) - (E(\hat{\theta}))^2 = \frac{n}{n+2}\theta^2 - \frac{n^2}{(n+1)^2}\theta^2 = \frac{n}{(n+1)^2(n+2)}\theta^2.$$

Keskineliövirhe on

$$\begin{aligned}
E[(\hat{\theta}-\theta)^2] &= \frac{n}{(n+1)^2(n+2)}\theta^2 + \left[\frac{n}{n+1}\theta - \theta\right]^2 \\
&= \left[\frac{n}{(n+1)^2(n+2)} + \frac{1}{(n+1)^2}\right]\theta^2 \\
&= \left[\frac{n}{(n+1)^2(n+2)} + \frac{n+2}{(n+1)^2(n+2)}\right]\theta^2 \\
&= \left[\frac{2(n+1)}{(n+1)^2(n+2)}\right]\theta^2 = \left[\frac{2}{(n+1)(n+2)}\right]\theta^2
\end{aligned}$$

Momenttimenetelmän mukaisen estimaattorin $\tilde{\theta} = 2\bar{Y}$ varianssi on

$$Var(\tilde{\theta}) = \frac{4}{n}\cdot Var(Y_1) = \frac{4}{n}\cdot\frac{\theta^2}{12} = \frac{1}{3n}\theta^2,$$

joka on harhattomuuden vuoksi myös sen keskineliövirhe. On suoraviivaista tarkistaa, että

$$\frac{1}{3n}\theta^2 \geq \frac{2}{(n+1)(n+2)}\theta^2,$$

kun $n \geq 2$, ja että kyseinen epäyhtälö pätee aidosti kun $n > 2$. Siten keskineliövirheen mielessä $\hat{\theta}$ on parempi kuin $\tilde{\theta}$.

d) Estimaattorin $\check{\theta}$ odotusarvo on

$$E(\check{\theta}) = \frac{n+1}{n}E(\hat{\theta}) = \frac{n+1}{n}\cdot\frac{n}{n+1}\theta = \theta,$$

eli $\check{\theta}$ on harhaton. Varianssiksi - ja harhattomuuden vuoksi samalla keskineliövirheeksi - saadaan

$$Var(\check{\theta}) = \frac{(n+1)^2}{n^2} Var(\hat{\theta}) = \frac{1}{n(n+2)}\theta^2.$$

On jälleen suoraviivaista tarkistaa, että $\hat{\theta}$:n ja $\check{\theta}$:n keskineliövirheet toteuttavat epäyhtälön

$$\frac{2}{(n+1)(n+2)}\theta^2 > \frac{1}{n(n+2)}\theta^2$$

kaikilla $n \geq 2$, joten $\check{\theta}$ on tehtävässä tarkastelluista kolmesta estimaattorista keskineliövirheen mielessä paras.