

Tilastollinen päättely, syksy 2013 - kevät 2014

Harjoitus 3

1. Tarkastellaan gammajakaumamallia $Y_1, \dots, Y_n \sim G(\alpha, 1/\beta) \perp\!\!\!\perp$, jossa $\alpha, \beta > 0$.

a) Parametrina on (α, β) . Totea, että uskottavuusyhtälöt voidaan saattaa muotoon

$$\begin{cases} \log \alpha - \psi(\alpha) = \log \bar{y} - n^{-1} \sum_{i=1}^n \log y_i, \\ \beta = \bar{y}/\alpha, \end{cases}$$

jossa $\psi(\alpha) = \Gamma'(\alpha)/\Gamma(\alpha)$, ja järkeile, ettei niitä voi ratkaista suljetussa muodossa.

b) Parametrina on vain β , ja α on tunnettu luku. Laske havaittu informaatio $j(\beta; \mathbf{y})$ ja Fisherin informaatio $i(\beta)$. Mikä on β :n su-estimaatti?

2. Olkoot $Y_1, \dots, Y_n \sim Exp(\lambda) \perp\!\!\!\perp$. Laske havaittu informaatio $j(\hat{\lambda}; \mathbf{y})$, Fisherin informaatio $i(\lambda)$ ja odotusarvo $E[l'(\lambda; \mathbf{Y})^2]$. [Monisteen harjoitustehtävä 2.11]

3. Tarkastellaan mallia, jossa havaintoja vastaavat satunnaismuuttujat Y_1, \dots, Y_n ovat riippumattomat. Mallin parametri on yksiulotteinen θ . Totea, että mallin havaittu informaatio ja Fisherin informaatio ovat

$$j(\theta; \mathbf{y}) = j_1(\theta; y_1) + \dots + j_n(\theta; y_n) \quad \text{ja} \quad i(\theta) = i_1(\theta) + \dots + i_n(\theta),$$

jossa $j_k(\theta; y_k)$ on pelkästään yhteen havaintoon y_k perustuva havaittu informaatio ja $i_k(\theta) = E[j_k(\theta; Y_k)]$ on vastaava Fisherin informaatio. Miten tulkitset tämän tuloksen? [Monisteen harjoitustehtävä 2.13]

4. Olkoot $Y_1, \dots, Y_n \perp\!\!\!\perp$ ja $Y_i \sim N(\beta x_i, \sigma_0^2)$, jossa x_1, \dots, x_n ovat tunnettuja lukuja ja $\sigma_0^2 > 0$ on tunnettu. Johda parametrin β suurimman uskottavuuden estimaatti ja mallin havaittu informaatio $j(\beta; \mathbf{y})$. Vertaa havaitun informaation arvoja tapauksissa a) $x_i \geq c > 0$ ja b) $x_i = 1/i$, kun $n \rightarrow \infty$.