Lineaariset mallit, kevät 2014

Harjoitus 6, viikko 18

Yleistentin 24.3.2011 kysymykset

1. Olkoon voimassa malli

$$Y_i = \beta_1 + \beta_2(x_{i1} - \bar{x}_1) + \beta_3(x_{i2} - \bar{x}_2) + \epsilon_i, \quad i = 1, \ldots, n.$$

   Satunnaismuuttujat ϵ_i ovat riippumattomia, $\epsilon_i \sim N(0, \sigma^2)$, ja $\bar{x}_j = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n x_{ij}$. Lisäksi

$$\sum_{i=1}^n (x_{i1} - \bar{x}_1)(x_{i2} - \bar{x}_2) = 0.$$

   (a) Johda kerroinparametrien β_j, $j = 1, 2, 3$ suurimman uskottavuuden estimaattoreille lausekkeet, joisssa ei esiinny matriisi- eikä vektorilaskennan operaatioita.

   (b) Kirjoita lauseke varianssiparametrin harhattomalle estimaattorille.

   (c) Kirjoita lauseke hypoteesin

$$H : \beta_1 = 0, \beta_2 = \beta_3$$

   F-testisuureelle. Mihin jakaumaan testisuuretta verrataan?

2. Oletetaan, että yleistetyn lineaarisen mallin malliyhtälössä $\boldsymbol{Y} = \boldsymbol{X}\boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\epsilon}$ matriisin $\boldsymbol{X}$ sarakkeet ovat ortogonaalisia eli kohtisuorassa toisiaan vastaa. Estimoi parametrivektori $\boldsymbol{\beta}$ soveltamalla lineaarisen mallin estimointiteoriaa ja selvitä estimaattorisi todennäköisyysjakauma. Muodosta lisäksi $100(1-\alpha)$%:n luottamusväli parametrille β_j (=$\boldsymbol{\beta}$:n j.s komponentti).

3. Olkoon $Y_1, \ldots, Y_7$ riippumattomia normaalisti jakautuneita satunnaismuuttujia, joille pätee $Y_i \sim N(\mu_i, \sigma^2)$ ja

$$\mu_i = \begin{cases} \beta_1, & \text{kun } i = 1, 2 \\ 2\beta_1, & \text{kun } i = 3, 4 \\ \beta_2, & \text{kun } i = 5, 6, 7. \end{cases}$$

   Muotoile tilanne lineaarisena mallina käyttäen matriiseja ja johda parametrien β_1, β_2 ja σ^2 suurimman uskottavuuden estimaatit.

4. Olkoon $Y_1, \ldots, Y_4$ riippumattomia normaalisti jakautuneita satunnaismuuttujia, joille pätee $Y_i \sim N(i\beta, \sigma^2)$ $(i = 1, \ldots, 4)$. Muotoile tilanne lineaarisena mallina ja johda testi hypoteesille $H : \beta = 1$ vaihtoehtoa $H : \beta \neq 1$ vastaan.

Oheismateriaalia

- Satunnaisvektorin $\boldsymbol{X} \sim N_k(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$ tiheysfunktio on

$$f(x) = (2\pi)^{-k/2} \det(\boldsymbol{\Sigma})^{-1/2} \exp\left\{-\frac{1}{2}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\mu})'\boldsymbol{\Sigma}^{-1}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\mu})\right\},$$

  jossa $\det(\boldsymbol{\Sigma})$ on kovarianssimatriisin $\boldsymbol{\Sigma}$ determinantti ja yksiulotteinen tapaus saadaan asettamalla $k = 1$.

- $F_{k,m}$-jakauman määrittelee satunnaismuuttuja

$$\frac{U/k}{V/m},$$

  jossa $U \sim \chi^2_k$, $V \sim \chi^2_m$ ja $U \perp\!\!\!\perp V$. Lisäksi $E(U) = k$ ja $Var(U) = 2k$.

- t_k-jakauman määrittelee satunnaismuuttuja

$$\frac{Z}{\sqrt{U/k}},$$

  jossa $Z \sim N(0,1)$, $U \sim \chi^2_k$ ja $Z \perp\!\!\!\perp U$.

- Jos $\boldsymbol{X} \sim N_k(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$, niin $(\boldsymbol{X}-\boldsymbol{\mu})'\boldsymbol{\Sigma}^{-1}(\boldsymbol{X}-\boldsymbol{\mu}) \sim \chi^2_k$.

- Jos $\boldsymbol{X} \sim N_k(\boldsymbol{\mu}, \sigma^2\boldsymbol{I}_k)$ ja matriisi $\boldsymbol{P}$ $(k \times k)$ on astetta r oleva ortogonaalinen projektio, niin $(\boldsymbol{X}-\boldsymbol{\mu})'\boldsymbol{P}(\boldsymbol{X}-\boldsymbol{\mu})/\sigma^2 \sim \chi^2_r$.