Lineaariset mallit, kevät 2014

Harjoitus 4, viikko 15

1. Olkoon oikea (täysiasteinen) malli $\boldsymbol{Y} = \boldsymbol{X}_1\boldsymbol{\beta}_1 + \boldsymbol{X}_2\boldsymbol{\beta}_2 + \boldsymbol{\varepsilon}$ ($\boldsymbol{\varepsilon} \sim N_n(\mathbf{0}, \sigma^2\boldsymbol{I}_n), \boldsymbol{\beta}_1 \in \mathbb{R}^{p_1}, \boldsymbol{\beta}_2 \in \mathbb{R}^{p_2}, \sigma^2 > 0$). Oletetaan, että $\boldsymbol{\beta}_1$ estimoidaan kuitenkin käyttäen mallia, josta $\boldsymbol{X}_2$ on jätetty pois (eli malliyhtälö on $\boldsymbol{Y} = \boldsymbol{X}_1\boldsymbol{\beta}_1 + \boldsymbol{\varepsilon}_*$). Laske näin saadun $\boldsymbol{\beta}_1$:n PNS-estimaattorin odotusarvo ja selvitä myös sen todennäköisyysjakauma. Milloin tämä estimaattori on harhaton?

2. (Jatkoa harjoituksen 2 tehtävälle 2) (i) Johda tehtävän varianssianalyysimallissa parametrien $\mu_1, \ldots, \mu_p$ PNS-estimaattien lausekkeet normaaliyhtälöiden ratkaisukaavaa käyttäen. (ii) Johda PNS-estimaattorien odotusarvot, varianssit ja kovarianssit (eli odotusarvovektori ja kovarianssimatriisi) ja osoita, että PNS-estimaattori $\hat{\boldsymbol{\mu}} = [\hat{\mu}_1 \cdots \hat{\mu}_p]'$ noudattaa multinormaalijakaumaa.

3. Tarkastellaan kahta riippumatonta lineaarista mallia

   $$\boldsymbol{Y}_i = \boldsymbol{X}_i\boldsymbol{\beta}_i + \boldsymbol{\varepsilon}_i,\ \boldsymbol{\varepsilon}_i \sim N_{n_i}(\mathbf{0}, \sigma^2\boldsymbol{I}_{n_i}),\ \boldsymbol{\varepsilon}_1 \perp\!\!\!\perp \boldsymbol{\varepsilon}_2,\ \boldsymbol{\beta}_i \in \mathbb{R}^p,\ \sigma^2 > 0,\ \mathrm{r}(\boldsymbol{X}_i) = p, i = 1, 2.$$

   Muodosta näistä matriiseja käyttäen yksi malli ja esitä parametrin $\boldsymbol{\beta} = [\boldsymbol{\beta}_1'\ \boldsymbol{\beta}_2']'$ PNS-estimaattorin lauseke. Mikä on saadun PNS-estimaattorin jakauma? Aputulos: Olkoon $\boldsymbol{A}$ ja $\boldsymbol{B}$ epäsingulaarisia neliömatriiseja. Tällöin

   $$\begin{pmatrix} \boldsymbol{A} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \boldsymbol{B} \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{A}^{-1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \boldsymbol{B}^{-1} \end{pmatrix}.$$

4. Tarkastellaan kahden riippumattoman normaalisen otoksen mallia

   $$Y_1, \ldots, Y_n \ \perp\!\!\!\perp,\ Y_i \sim \begin{cases} N(\mu_1, \sigma^2), & \text{kun } i = 1, \ldots, n_1 \\ N(\mu_2, \sigma^2), & \text{kun } i = n_1 + 1, \ldots, n_1 + n_2 = n \end{cases}$$

   ($\mu_1, \mu_2 \in \mathbb{R}, \sigma^2 > 0, n_1, n2 > 1$). Estimoi parametrit μ_1 ja μ_2 ehdolla $\mu_1 = \mu_2$ käyttäen monisteessa (s. 16) esitettyä rajoitetun PNS-estimaattorin kaavaa (2.8).

5. Jatkoa edelliselle. Mikä on parametrin σ^2 harhaton estimaattori ja sen jakauma, kun parametrien μ_1 ja μ_2 oletetaan toteuttavan rajoite $\mu_1 = \mu_2$? Entä mikä on σ^2:n harhaton estimaattori ja sen jakauma, kun μ_1 ja μ_2 ovat vapaasti vaihtelevia parametreja?