Lineaariset mallit, kevät 2014

Harjoitus 1, viikko 12

1. Olkoot $\boldsymbol{Y}$ ja $\boldsymbol{\epsilon}$ $n \times 1$ satunnaismuuttujavektoreita, $\boldsymbol{X}$ kiinteä $n \times p$ havaintomatriisi ja $\boldsymbol{\beta}$ parametreista koostuva $p \times 1$ vektori ($n > p > 0$). Merkitään matriisin $\boldsymbol{X}$ elementtejä x_{ij}:llä ja jäännösvektorin (virhevektorin) $\boldsymbol{\epsilon}$ elementtejä ϵ_i:llä. Selitä huolellisesti merkinnät, yhtäsuuruudet ja matriisien ja vektorien dimensiot alla:

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{Y} &= \boldsymbol{X}\boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\epsilon} \\
&= \begin{pmatrix} x_{11} & \cdots & x_{1p} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{n1} & \cdots & x_{np} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_p \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \epsilon_1 \\ \vdots \\ \epsilon_n \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^p x_{1i}\beta_i \\ \vdots \\ \sum_{i=1}^p x_{ni}\beta_i \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \epsilon_1 \\ \vdots \\ \epsilon_n \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \boldsymbol{x}_1'\boldsymbol{\beta} \\ \vdots \\ \boldsymbol{x}_n'\boldsymbol{\beta} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \epsilon_1 \\ \vdots \\ \epsilon_n \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \boldsymbol{x}_1' \\ \vdots \\ \boldsymbol{x}_n' \end{pmatrix} \boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\epsilon} \\
&= \begin{pmatrix} \boldsymbol{x}_{(1)} & \cdots & \boldsymbol{x}_{(p)} \end{pmatrix} \boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\epsilon} \\
&= \boldsymbol{x}_{(1)}\beta_1 + \cdots + \boldsymbol{x}_{(p)}\beta_p + \boldsymbol{\epsilon}
\end{aligned}
$$

   Selitä eritoten viimeisen ja kolmanneksi viimeisen yhtälön sisällöt sanoin.

2. Olkoon $\boldsymbol{x}_1 = [1, 2, 1]'$, $\boldsymbol{x}_2 = [-1, 3, 2]'$, $\boldsymbol{x}_3 = [-13, -1, 2]'$ ja $\boldsymbol{x}_4 = [1, 1, 0]'$. Näytä, että

   (a) vektorit $\boldsymbol{x}_1$, $\boldsymbol{x}_2$ ja $\boldsymbol{x}_3$ ovat lineaarisesti riippuvia ja anna niiden välinen lineaarinen suhde eli etsi vakiot a_1 ja a_2, joilla $\boldsymbol{x}_3 = a_1\boldsymbol{x}_1 + a_2\boldsymbol{x}_2$.

   (b) vektorit $\boldsymbol{x}_1$, $\boldsymbol{x}_2$ ja $\boldsymbol{x}_4$ ovat lineaarisesti riippumattomia ja etsi niiden lineaarinen kombinaatio, joka antaa vektorin $[a, b, c]'$.

   Huom! Matriisi

$$
\boldsymbol{X} = (\boldsymbol{x}_1\ \boldsymbol{x}_2\ \boldsymbol{x}_3) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -13 \\ 2 & 3 & -1 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}
$$

ei ole siis täyttä sarakeastetta eli $r(\boldsymbol{X}) < 3$ ja matriisi $\boldsymbol{X} = (\boldsymbol{x}_1\ \boldsymbol{x}_2\ \boldsymbol{x}_4)$ on täyttä sarakeastetta eli $r(\boldsymbol{X}) = 3$.

3. Olkoon $Y_1, \ldots, Y_5$ riippumattomia normaalisti jakautuneita satunnaismuuttujia, joille pätee $Y_i \sim N(\mu_i, \sigma^2)$ ja

$$\mu_i = \begin{cases} \beta_1, & \text{kun } i = 1, 2 \\ \beta_1 + 2\beta_2, & \text{kun } i = 3 \\ \beta_1 - \beta_2, & \text{kun } i = 4, 5. \end{cases}$$

   Muotoile tilanne lineaarisena mallina eli kirjoita malli muodossa $\boldsymbol{Y} = \boldsymbol{X}\boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\epsilon}$.

4. Olkoon $Y_1, \ldots, Y_7$ riippumattomia normaalisti jakautuneita satunnaismuuttujia, joille pätee $Y_i \sim N(\mu_i, \sigma^2)$ ja

$$\mu_i = \begin{cases} \beta_1, & \text{kun } i = 1, 2 \\ 2\beta_1, & \text{kun } i = 3, 4 \\ \beta_2, & \text{kun } i = 5, 6, 7. \end{cases}$$

   Muotoile tilanne lineaarisena mallina käyttäen matriiseja eli anna malli muodossa $\boldsymbol{Y} = \boldsymbol{X}\boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\epsilon}$.

5. Olkoon $Y_1, \ldots, Y_{15}$ riippumattomia ja normaalisti jakautuneita satunnaismuuttujia, joille pätee $Y_i \sim N(\mu_i, \sigma^2)$ ja

$$\mu_i = \begin{cases} \beta_1, & \text{kun } i = 1, \ldots, 5 \\ \beta_1 + \beta_2, & \text{kun } i = 6, \ldots, 10 \\ \beta_1 - \beta_2, & \text{kun } i = 11, \ldots, 15 \end{cases}$$

   Muotoile tilanne lineaarisena mallina käyttäen matriiseja eli anna malli muodossa $\boldsymbol{Y} = \boldsymbol{X}\boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\epsilon}$.